DM – Intégrales de Wallis

A. Formule de Moivre – PSI : FAIT EN COURS + SIMPLEMENT

Nous allons établir dans cette partie qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$. Notre but va être de montrer que (u_n) tend vers une limite non nulle.

1. Posons, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. Calculer v_n pour tout entier naturel n.

2. En rappelant le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$, montrer que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. En revenant à la définition de o, montrer que $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ à partir d'un certain rang.

Convergence de la série des (v_n). On pose pour n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.

4. Montrer que (S_n) est croissante à partir d'un certain rang.

5. En montrant que pour tout entier naturel k non nul, $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, montrer que (S_n) est bornée. En déduire que (S_n) converge.

6. Déduire des questions précédentes que u_n converge vers une limite non nulle, nommons-là C.

B. Détermination de la constante à l'aide des intégrales de Wallis

On définit, pour tout entier naturel n, l'intégrale $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

7. Soit n dans $\mathbb{N}$. Déterminer par une intégration par parties que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, et en déduire, pour tout entier p,

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}, \\[2mm] W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases}$$

Équivalent de W_n.

8. En utilisant la relation de récurrence trouvée précédemment, montrer que $W_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

9. Montrer que pour tout entier naturel n, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.

10. Montrer que la suite $\big((n+1)W_nW_{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, et déterminer sa valeur.

11. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

12. Démontrer que la constante C définie dans la première section est égale à $\sqrt{2\pi}$. On a donc démontré que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$