DM – Intégrales de Wallis

A. Formule de Moivre – PSI : FAIT EN COURS + SIMPLEMENT

Nous allons établir dans cette partie qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$. Notre but va être de montrer que (u_n) tend vers une limite non nulle.

1. Posons, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. Calculer v_n pour tout entier naturel n.

Correction

Par le calcul, on trouve $v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$.

2. En rappelant le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1 + x)$, montrer que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Correction

On sait que $\ln(1 + x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Or, $\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc

$$v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. En revenant à la définition de o, montrer que $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ à partir d'un certain rang.

Correction

Par l'expression précédente, on dispose d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$, telle que

$$v_n = \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$

On sait que $\varepsilon_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc on dispose de N dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait

$$-\frac{1}{12} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{12}.$$

Soit alors $n \geqslant N$. On a $-\dfrac{1}{12} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \dfrac{1}{12}$, donc $-\dfrac{1}{12n^2} \leqslant \dfrac{\varepsilon_n}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{12n^2}$, donc

$$0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{6n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}, \text{ d'où le résultat.}$$

Convergence de la série des (v_n). On pose pour n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

4. Montrer que (S_n) est croissante à partir d'un certain rang.

Correction

Soit $n \geqslant N$. Alors $S_{n+1} - S_n = v_{n+1} \geqslant 0$, car $n+1 \geqslant N$. Donc (S_n) est croissante à partir du rang N.

5. En montrant que pour tout entier naturel k non nul, $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, montrer que (S_n) est bornée. En déduire que (S_n) converge.

Correction

Soit k un entier naturel non nul. Remarquons que $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.
On sait que $k \leqslant k+1$, donc $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k}$, donc

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k(k+1)}, \text{ i.e. } \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

D'où le résultat.
Maintenant, bornons S_n. Soit $n \geqslant N$. Alors, par l'inégalité triangulaire,

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} v_k\right| \leqslant |S_N| + \left|\sum_{k=N+1}^{n} v_k\right|.$$

Or, pour $k \geqslant N+1$, $0 \leqslant v_k \leqslant \frac{1}{k^2}$, donc

$$\left|\sum_{k=N+1}^{n} v_k\right| = \sum_{k=N+1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Par l'inégalité $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, réécrite en $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, on a

$$\sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{N} - \frac{1}{n} \leqslant 2,$$

par télescopage. Donc pour tout $n \geqslant N$, $|S_n| \leqslant |S_N| + 2$, donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|S_n| \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} |S_N| + 2$. Donc (S_n) est bornée.

6. Déduire des questions précédentes que u_n converge vers une limite non nulle, nommons-là C.

Correction

(S_n) est croissante et majorée, donc, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite réelle ℓ. Or, par télescopage, pour tout n non nul, $S_n = \ln\left(\frac{u_1}{u_{n+1}}\right)$. Donc $\frac{u_1}{u_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell}$, i.e. $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_1 \mathrm{e}^{-\ell}$, i.e. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_1 \mathrm{e}^{-\ell}$, qui est une limite non nulle car $u_1 \neq 0$.

B. Détermination de la constante à l'aide des intégrales de Wallis

On définit, pour tout entier naturel n, l'intégrale $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

7. Soit n dans $\mathbb{N}$. Déterminer par une intégration par parties que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, et en déduire, pour tout entier p,

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}, \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases}$$

Correction

Soit n un entier naturel. On veut calculer

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)dx.$$

Posons $u'(x) = \sin(x)$, $v(x) = \sin^{n+1}(x)$. Alors $u(x) = -\cos(x)$ et $v'(x) = (n+1)\cos(x)\sin^n(x)$. Donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= [\sin^{n+1}(x)\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)(n+1)\cos(x)\sin^n(x)dx \\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x)dx \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\sin^n(x)dx \\ &= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\sin^n(x)dx\right) \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}). \end{aligned}$$

Donc $W_{n+2} = (n+1)W_{n+1} - (n+1)W_{n+2}$, donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. Donc

$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.}$$

Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}_p$ suivante :

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}, \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_p)$$

Initialisation. Pour $p = 0$, on a calculé en première question $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}(0!)^2}$ et $W_1 = 1 = \dfrac{2^{2\times 0}(0!)^2}{(2\times 0+1)!}$.

Hérédité. Supposons que $\mathcal{P}_p$ est vraie pour un certain entier p. Alors $W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$

et $W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$. Or,

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)} = W_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} \text{ par la question précédente.}\\
&= \frac{2p+1}{2p+2}\frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \text{ par hypothèse de récurrence.}\\
&= \frac{\pi}{2}\frac{(2p+1)\times(2p)!}{2\times(p+1)\times 2^{2p}(p!)^2}\\
&= \frac{\pi}{2}\frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}(p+1)\times(p!)^2}\\
&= \frac{\pi}{2}\frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)^2\times(p!)^2}\\
&= \frac{\pi}{2}\frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}\times((p+1)!)^2} = \boxed{\frac{\pi}{2}\frac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)}\times((p+1)!)^2}}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)+1} &= W_{2p+1+2}\\
&= \frac{2p+1+1}{2p+1+2} W_{2p+1} \text{ par la question précédente.}\\
&= \frac{2p+2}{2p+3}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \text{ par hypothèse de récurrence.}\\
&= \frac{2(p+1)2^{2p}(p!)^2}{(2p+3)(2p+1)!}\\
&= \frac{4(p+1)^2 2^{2p}(p!)^2}{(2p+3)(2p+2)(2p+1)!}\\
&= \frac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2p+3)!} = \boxed{\frac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!}}
\end{aligned}$$

La proposition est donc héréditaire.
Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition $\mathcal{P}_p$ est vraie pour tout entier naturel p.

Équivalent de W_n.

8. En utilisant la relation de récurrence trouvée précédemment, montrer que $W_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

Correction

On sait que pour tout entier naturel n, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. W_n est strictement positive par les formules trouvées question précédente. Donc

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$

Donc $W_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

9. Montrer que pour tout entier naturel n, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.

Correction

Pour tout x dans $[0, \pi/2]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc pour tout n dans n, $0 \leqslant \sin^{n+1}(x) \leqslant \sin^n(x)$. En intégrant les inégalités entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, on obtient $0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. Autrement dit la suite (W_n) est décroissante. Donc pour tout entier naturel n, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. Par stricte positivité de W_n, $\dfrac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$. Or, $\dfrac{W_{n+2}}{W_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, par encadrement, $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \underset{+infty}{\longrightarrow} 1$.

10. Montrer que la suite $\big((n+1)W_nW_{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, et déterminer sa valeur.

Correction

Pour tout entier naturel n, posons $a_n = (n+1)W_nW_{n+1}$. Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors

$$a_{n+1} = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = a_n,$$

par la relation de récurrence trouvée en question h. Donc (a_n) est constante, égale à $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

11. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Correction

On en déduit que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$. Or, $a_n = (n+1)W_{n+1}W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nW_n^2$ car $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$ donc $nW_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$, donc $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

12. Démontrer que la constante C définie dans la première section est égale à $\sqrt{2\pi}$. On a donc démontré que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Correction

On sait que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, donc

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{C\sqrt{2p}\left(\frac{2p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}}{2^{2p}\left(C\sqrt{p}\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^p\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2p}2^{2p}\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}}{C2^{2p}p\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2p}}\frac{1}{C}.$$

 nlaillet.math@gmail.com

Mais $W_{2p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2\times 2p}}$, donc $\dfrac{\pi}{\sqrt{2p}}\dfrac{1}{C} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$, donc $C \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$, i.e., comme C est une constante, $C = \sqrt{2\pi}$.