TD 02
Séries numériques

Exercice 1. *CCINP 24.* **1.** Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$. On note S_p la valeur de la somme.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\frac{\frac{(n+1)^p}{2^{n+1}}}{\frac{n^p}{2^n}} = \frac{(n+1)^p}{2n^p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Par le critère de D'Alembert, la série de terme général $\left(\dfrac{n^p}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. En développant $(n+1)^p$, exprimer S_p en fonction de $S_0, \dots, S_{p-1}$.

Correction

On remarque que

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^p}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{2^n}, \end{aligned}$$

ce par linéarité de la somme d'une série et car toutes les $\sum \dfrac{n^k}{2^n}$ sont convergentes. Ainsi,

$$S_p = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_k.$$

Le dernier terme de la somme est $\dfrac{1}{2} S_p$, on en déduit donc que

$$\boxed{S_p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} S_k.}$$

3. En déduire que $S_p \in \mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Correction

On démontre ce résultat, notons-le $\mathcal{H}_p$, par récurrence forte.
Déjà, $\mathcal{H}_0$ est clairement vrai car $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}=2\in\mathbb{N}$.

Ensuite, soit $p\in\mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_0,\dots,\mathcal{H}_{p-1}$ vraies. Alors, comme $S_p=\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}S_k$ et comme les coefficients binomiaux $\binom{p}{k}$ sont tous entiers, on en déduit que $S_p\in\mathbb{N}$.

Exercice 2. *CCINP 24*. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\int_{n^2}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ puis celle de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_0^n\mathrm{e}^{-n^2t^2}\,\mathrm{d}t$.
(on vérifiera d'abord que chacun des deux termes généraux est bien défini)

Correction

Chouette, un exercice qui mêle intégrales et séries !

Première série Déjà, la fonction $t\mapsto\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[n^2,+\infty[$ et $\mathrm{e}^{-t^2}\underset{t\to+\infty}{=}o(1/t^2)$, qui est intégrable. La fonction étant positive, on sait que le reste $\displaystyle\int_y^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt$ tend en décroissant vers 0 lorsque y tend vers $+\infty$.
Ainsi, $\displaystyle\int_{n^2}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est positive, décroissante, tend vers 0 ; a fortiori, $\displaystyle\frac{1}{n}\int_{n^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ aussi. Donc, par le critère des séries alternées, la série de terme général $u_n=\displaystyle\frac{(-1)^n}{n}\int_{n^2}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Deuxième série Pour mieux comprendre le terme général de cette série, on effectue le changement de variables linéaire $u=nt$. Ainsi,

$$\int_0^n\mathrm{e}^{-n^2t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\int_0^{n^2}\mathrm{e}^{-n^2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En notant $v_n=(-1)^n\displaystyle\int_0^n\mathrm{e}^{-n^2t^2}\,\mathrm{d}t$, on remarque, par le calcul qu'on vient de faire, que

$$u_n+v_n=(-1)^n\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt.$$

Mais $\displaystyle\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt$ est positive, décroissante, tend vers 0 donc la série de terme général $(-1)^n\displaystyle\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt$ converge par le critère des séries alternées.
Ainsi, $\sum u_n$ converge, $\sum u_n+v_n$ aussi, donc $\sum v_n$ converge.

Exercice 3. *CCINP 24*. Pour $n\in\mathbf{N}^*$, soit $u_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

1. Justifier la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'elle converge vers 0.

Correction

On remarque que la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et qu'elle tend vers 0 donc, par le critère des séries alternées, la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ converge. Ainsi, son reste d'ordre n, u_n, est défini et tend vers 0 en $+\infty$.

2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} u_n$. Montrer que la série de terme général v_n converge.

Correction

Il s'agit là d'étudier un peu plus finement le reste d'une série alternée. Par le cours, on sait que pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n est du signe de $(-1)^{n+1+1} = (-1)^n$ et que $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Ainsi, on a l'inégalité

$$0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann), on en déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que la série de terme général v_n converge.

3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Nature de la série de terme général w_n ?

Correction

Notons $z_n = v_n + w_n$. Alors

$$z_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} = \frac{(-1)^n}{n} \times C,$$

où C est une constante ne dépendant pas de n (c'est la valeur de la somme de la série alternée de terme général $\dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$), positive.

Ainsi, comme la série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge, la série de terme général z_n converge. Mais $w_n = z_n - v_n$ donc la série de terme général w_n converge.

4. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Nature de la série de terme général x_n ?

Correction

Avec les notations de la question précédente, on sait que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} C > 0,$$

 nlaillet.math@gmail.com

donc

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n},$$

terme général d'une série divergente. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général x_n diverge.

Exercice 4. *Mines-Telecom 23*. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}\ln(n)}$?

Correction

Attention, là on ne peut pas faire directement un équivalent ! On aurait $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)}$ *mais on ne peut pas conclure, les termes ne sont pas positifs !*

Effectuons un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)}} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} - \frac{1}{n\ln(n)^2} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)^2}\right). \end{aligned}$$

Donc $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)} + v_n$, où

- $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)}$ est le terme général d'une série alternée convergente (car $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ est positive, décroissante et tend vers 0)
- $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n\ln(n)^2}$, qui est le terme général **de signe constant** d'une série convergente (*série de Bertrand, cf. exemple du cours !*)

On en conclut donc que la série de terme général u_n converge !

Exercice 5. *Mines-Telecom 23*. **1.** Étudier la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Correction

On propose une étude succincte :

- $u_0 > 0$ et, si $u_n > 0$, alors $\ln(1+u_n) > 0$, donc (u_n) est positive,
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n) \leqslant u_n$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$,
- enfin, par continuité de $x \mapsto \ln(1+x)$, on en déduit que $\ell = \ln(1+\ell)$. Cette égalité n'advient que si $\ell = 0$ (on peut s'en convaincre en étudiant la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$, strictement croissante, puis strictement décroissante).

$\boxed{\text{Ainsi, } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ en décroissant.}}$

2. Établir la convergence de la série de terme général u_n^2.

Correction

On remarque que, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2),$$

ainsi,

$$u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}, \text{ donc } u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -2(u_{n+1} - u_n).$$

Or, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge car la suite (u_n) converge. Donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général u_n^2 converge.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que la suite (v_n) est convergente.

Correction

On écrit que

$$v_n = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{u_n^2}{2}}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4. En admettant le lemme de Cesàro, en déduire un équivalent de u_n.

Correction

Comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, on en déduit par le lemme de Cesàro, que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

i.e.

$$\frac{1}{n}(u_n - u_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

ou, plus précisément,

$$\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}, \text{ donc } \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

Exercice 6. *Mines-Telecom 23*. Nature de la série de terme général $u_n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - \frac{\pi}{4}$?

Correction

Déjà, on remarque que comme $\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$, on a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ensuite, on va utiliser le théorème des accroissements finis : on dispose de $c_n \in \left]1, \frac{n+1}{n-1}\right[$ tel que

$$\begin{aligned} u_n &\leqslant \mathrm{Arctan}'(c_n)\left(\frac{n+1}{n-1} - 1\right) \\ &= \frac{1}{1+c_n^2}\frac{2}{n-1}. \end{aligned}$$

Or, $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série divergente, donc, par comparaison à une série à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Exercice 7. *Centrale 24*. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq -1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$.

Correction

 nlaillet.math@gmail.com

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} v_k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1+u_k-1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1+u_k}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_{k-1})} - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} \\
&= \boxed{1 - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}} \text{ par télescopage.}
\end{aligned}$$

2. Montrer que si (u_n) est à termes positifs, alors la série de terme général v_n est convergente.

Correction

Si (u_n) est à termes positifs, on remarque que la suite $\left(\frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, et décroissante car $1+u_n \geqslant 1$ pour tout n. Par le théorème de la limite monotone, elle converge, donc $\sum_{k=0}^{n} v_k$ converge. aussi, c'est-à-dire que la série est convergente.

3. Montrer que si la série de terme général u_n est absolument convergente, alors la série de terme général v_n est absolument convergente.

Correction

On suppose ici que $\sum |u_n|$ converge. *On aimerait pouvoir dire quelque chose comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{C}$, mais, pour ce faire, il faut démontrer que le dénominateur converge !*

Notons, pour n dans $\mathbb{N}$, $p_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$. Comme $\sum |u_n|$ converge, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $1+u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, à partir d'un certain rang, $1+u_k > 0$. Quitte à sauter les premiers indices, on suppose que ce rang est 0. Ainsi, on obtient

$$\ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k).$$

Or, comme $u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\ln(1+u_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} u_k$, qui est le terme général d'une série absolument convergente. On en déduit que la série de terme général $\ln(1+u_k)$ converge

absolument, donc on dispose de $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(p_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ell}$.
Ainsi,

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{\ell},$$

et comme $\sum u_n$ converge absolument, $\sum v_n$ aussi.

Exercice 8. *Centrale 24*. Nature de la série de terme général $z_n = \sqrt{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$?

Correction

Méthode plus rapide mais avec un résultat hors-programme. On essaie de faire une règle de D'Alembert,mais qui ne fonctionne pas. On écrit quand même :

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On va ensuite utiliser la règle de Raabe-Duhamel. L'idée est de trouver une série (convergente ou divergente) de terme généal (v_n) *telle que* $\frac{z_{n+1}}{z_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ *ou* $\frac{z_{n+1}}{z_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$. *Ensuite, c'est assez classique de démontrer qu'on en déduit le comportement de la série de terme général* (z_n).

Posons $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha > 0$. Alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En prenant $\frac{1}{6} < \alpha < 1$, on remarque que, asymptotiquement (i.e. à partir d'un certain rang N), on a $\frac{z_{n+1}}{z_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$. On en déduit alors que pour $n > N$,

$$\prod_{k=N}^{n-1} \frac{z_{k+1}}{z_k} \geqslant \prod_{k=N}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k},$$

soit $\frac{z_n}{z_N} \geqslant \frac{v_n}{v_N}$. Par comparaison de séries à termes positifs, et comme la série de terme général v_n diverge, la série de terme général z_n diverge.

Méthode piétonne, mais pour moi davantage dans l'esprit du cours. Même si z_n est défini à l'aide d'un produit, la règle de D'Alembert ne fonctionne malheureusement pas. Remarquons que $z_n = \prod_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ où f est la fonction sinus cardinal, $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Regardons $\ln(z_n)$.

$$\ln(z_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right).$$

Or, $f(x) \underset{x\to0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$, donc

$$\ln\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6k}.$$

Par comparaison à une série à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\ln\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)$ diverge (vers $-\infty$) et donc que $\ln(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Maintenant, on voudrait dire que $\ln(z_n) \sim -\frac{1}{6}\ln(n)$ *(comme la somme partielle de la série harmonique), et que « donc »* $z_n \sim \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}\ln(n)}$*. Problème, on ne sait pas en quoi un équivalent du terme général permet un équivalent des sommes partielles et, pire encore, on ne peut pas passer les équivalents à l'exponentielle. Cependant, on va reprendre l'idée que l'on a eues en cours pour trouver un équivalent de* H_n*.*

Montrons que $u_n = \ln(z_n) + \frac{1}{6}\ln(n)$ converge. Pour ce faire, on étudie $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \ln\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \ln\left(\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) + \frac{1}{6}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{1}{6n} + \frac{1}{120n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{6n} + \frac{1}{120n^2} + \frac{1}{36n^2} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Donc, par comparaison à une série absolument convergente, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge, donc la **suite** (u_n) converge vers un réel c. Ainsi, $\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^c$, d'où

$$n^{1/6} z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^c, \text{ i.e. } \boxed{z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{n^{1/6}}.}$$

Par comparaison à une série à termes positifs, la série de terme général z_n diverge.

Exercice 9. *Mines-Ponts 23*. **1.** Montrer que $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k^2-1}$ converge et calculer sa valeur.

Correction

Déjà, on remarque que $\frac{1}{k^2-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Par comparaison à une série à termes positifs, la série converge.

Ensuite, on prend $n \in \mathbb{N}$ et on écrit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)(k+1)} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

La somme recherchée vaut donc $\frac{3}{4}$.

2. Montrer que $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k}$ converge et calculer sa valeur.

Correction

On commence sans regarder vraiment ce qu'il se passe, on essaie de faire de l'asymptotique, on bloque... jusqu'à se demander : mais qu'est-ce que ça vaut $\left\lfloor\sqrt{k+1}\right\rfloor - \left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor$ *? Et là, tout s'éclaire !*

Notons u_k le terme général de cette série. On remarque que si k et $k+1$ sont tous deux dans $[\![p^2, (p+1)^2-1]\!]$, alors $\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{k+1}\right\rfloor = p$. Ainsi,

$$\frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k} = 0 \text{ sauf si } k = p^2-1 \text{ et } k+1 = p^2.$$

Ainsi, si l'on note $m_n = \left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor$, le plus grand carré inférieur ou égal à n est m^2. On a donc

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{j=1}^{m_n} \frac{1}{j^2-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4},$$

par la question précédente.

Exercice 10. *Mines 23*. Soit $p \in \mathbf{Z}$. Étudier la série de terme général $a_n = \sin\left(\frac{2n^2+pn-1}{2n+1}\pi\right)$.

Correction

Quand on regarde (a_n), on se dit que ça a une tête de série alternée. Or, qu'est-ce qui fait alterner le sinus : c'est $n\pi$! On fait donc apparaître artificiellement $n\pi$ dans le sinus.
On écrit

$$\begin{aligned} a_n &= \sin\left(\frac{2n^2+pn-1}{2n+1}\pi\right) \\ &= \sin\left(n\pi - n\pi + \frac{2n^2+pn-1}{2n+1}\pi\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{-2n^2-n+2n^2+pn-1}{2n+1}\pi\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{(p-1)n-1}{2n+1}\pi\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{(p-1)n-1}{2n+1}\pi\right). \end{aligned}$$

Ensuite, on remarque que

$$\sin\left(\frac{(p-1)n-1}{2n+1}\pi\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin\left(\frac{p-1}{2}\pi\right).$$

Ainsi,

- si $p-1$ est impair, a_n ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.
- si $p-1$ est pair, a_n tend vers 0. Il reste à démontrer que $|a_n|$ est bien monotone. Pour ce faire, on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{(p-1)n-1}{2n+1} &= \frac{(p-1)\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{p-1}{2} - 1}{2n+1} \\ &= \frac{p-1}{2} - \frac{1+\frac{p-1}{2}}{2n+1}. \end{aligned}$$

  On en déduit donc que $\dfrac{(p-1)n-1}{2n+1}\pi$ tend en croissant vers $\dfrac{p-1}{2}\pi$, donc que $\sin\left(\dfrac{(p-1)n-1}{2n+1}\pi\right)$ est négative et tend en croissant vers 0. Donc $|a_n|$ tend en décroissant vers 0. Par le critère des séries alternées, on en déduit que la série de terme général a_n converge.

Exercice 11. *X 24*. Étudier la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$ (convergence, convergence absolue).

Correction

Convergence *On a envie de sauter à pieds joints dans un critère des séries alternées. Malheureusement, je n'ai pas réussi à démontrer de monotonie... on va essayer de faire autrement !*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{2n} + u_{2n+1} &= \frac{\sin(\ln(2n))}{2n} - \frac{\sin(\ln(2n+1))}{2n+1} \\ &= \frac{(2n+1)\sin(\ln(2n)) - 2n\sin(\ln(2n+1))}{2n(2n+1)} \\ &= \frac{\sin(\ln(2n)}{2n(2n+1)} - \frac{\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln(2n))}{2n+1}. \end{aligned}$$

Le premier terme correspond au terme général d'une série absolument convergente. Pour le second, on utilise un théorème des accroissements finis avec $f : x \mapsto \sin(\ln(x))$, donc la dérivée est $\dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$: on dispose de c_n dans $[2n, 2n+1]$ tel que

$$\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln(2n)) = \frac{\cos(\ln(c_n))}{c_n},$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln(2n))}{2n+1} \right| &= \frac{|cos(\ln(c_n))|}{(2n+1)c_n} \\ &\leqslant \frac{1}{(2n+1)2n}, \end{aligned}$$

terme général d'une série convergente, donc la série de terme général $\dfrac{\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln(2n))}{2n+1}$ converge, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} u_k$ converge, tout comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} u_k$ (car la différence des deux tend vers 0). Donc la série de terme général u_n converge.

Convergence absolue *On n'a toujours pas de monotonie, mais en même temps, avoir une intégrale nous aiderait peut-être.*
On note

$$v_n = u_n - \int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln(n))}{n} - \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx.$$

Un théorème des accroissements finis entre x et n assure qu'il existe $c_x \in [n, x]$ vérifiant

$$\frac{\sin(\ln(n))}{n} - \frac{\sin(\ln(x))}{x} = \frac{\cos(\ln(c_x)) - \sin(\ln(c_x))}{c_x^2}$$

(on a dérivé la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(\ln(x))}{x}$). Ainsi,

$$\left| \frac{\sin(\ln(n))}{n} - \frac{\sin(\ln(x))}{x} \right| \leqslant \frac{2}{c_x^2} \leqslant \frac{2}{n^2},$$

donc $|v_n| \leqslant \dfrac{2}{n^2}$. Ainsi, la série de terme général v_n converge absolument, donc converge. Donc la série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx$,

qui est de même nature que la **suite** de terme général $\cos(\ln(n))$.
Il reste donc à montrer que cette suite diverge.
C'est vrai, mais cela dépasse quand même **un peu** le cadre de la PSI... L'idée est que $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ mais $\ln(n+1) - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, on peut construire une suite d'entiers k_n telle que $\ln(k_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0[2\pi]$ et une suite d'entiers ℓ_n telle que $\ln(\ell_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Me demander si vous avez cherché cela et que vous bloquez encore !