nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 03
Algèbre linéaire – Résumé de cours

1 Rappels brefs

Définition 1

Une partie F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si $0 \in F$ et : $\forall (x, y) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda x + \mu y \in F$.

Définition 2

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite

- libre si : $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0\right) \Rightarrow (\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)$,
- génératrice si : $\forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$,
- une base si elle est libre et génératrice ou si : $\forall x \in E,\ \exists ! (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Proposition 3

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** n :

1. toute famille libre possède moins de n éléments, et toute famille libre de n éléments est une base.
2. toute famille génératrice possède au moins n éléments, et toute famille génératrice de n éléments est une base.
3. tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension inférieure ou égale à n et tout sous-espace vectoriel F de E de dimension n est égal à E.

Proposition 4 (Formule de Grassmann)

Si E est un $\mathbb{K}$-evdf n, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E,

1. $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
2. on a les équivalences :
   - $F \oplus G = E$
   - $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
   - $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

nlaillet.math@gmail.com

Définition 5

Si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, une application $\varphi : E \to F$ est linéaire si : $\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$.

Proposition 6

1. Une application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective ssi $\ker(\varphi) = \{0_E\}$ où le noyau de φ est défini par $\ker(\varphi) = \{x \in E,\ \varphi(x) = 0_F\}$.
2. Soit $y \in F$. L'ensemble des solutions de $\varphi(x) = y$ est
   - ou bien vide si $y \notin \mathrm{Im}(\varphi)$,
   - ou bien égal à $\{x_0 + h,\ h \in \ker(\varphi)\}$ sinon, où x_0 est une solution particulière de l'équation.

Définition 7

Le rang de $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ est la dimension de l'image de φ. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, c'est $\dim(\mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)))$.

Proposition 8 (Théorème du rang)

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(E)$
2. si $\dim(E) = \dim(F)$, on a les équivalences entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de φ.

Proposition 9 (Formes linéaires et hyperplans)

Soit H un sous-espace vectoriel de E. On a les équivalences entre

1. $\exists \varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}),\ H = \ker(\varphi)$,
2. $\exists u \in E \setminus \{0\},\ H \oplus \mathrm{Vect}(u) = E$,
3. (si E est de dimension finie) $\dim(H) = n - 1$.

Définition 10 (Matrices, calcul matriciel)

1. Si A est dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B est dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{ik}[B]_{kj}$.
2. En notant $E_{a,b} = (\delta_{ia}\delta_{jb})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, on a la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
3. Dans le cas de matrices carrées, $E_{a,b}E_{c,d} = \delta_{bc}E_{a,d}$.

Proposition 11 (Mieux comprendre les matrices)

1. **Une matrice est une application linéaire** : si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application linéaire canoniquement associée à A est l'application $f_A : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n \\ X \mapsto AX \end{array} \right.$. On définit $\ker(A)$, $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{rg}(A)$.
2. **Une application linéaire est une matrice** : si $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$, $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$, si $\mathscr{E}$ est une base de E et $\mathscr{F}$ est une base de F, on peut représenter φ par $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(\varphi) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et l'application $\Psi : \left| \begin{array}{l} \mathscr{L}(E,F) \to \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ \varphi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(\varphi) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Définition 12

1. Deux matrices rectangulaires A et B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes s'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ et Q dans $GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.
2. Deux matrices carrées A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Proposition 13

1. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{F})\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}') = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$
2. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang (si et seulement si elles représentent la même application linéaire).
3. Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même **endomorphisme** (en prenant, pour chaque représentation, la même base au départ qu'à l'arrivée).

Proposition 14 (Interprétation du rang d'une matrice)

Si A est une matrice, le rang de A est :

- le rang de l'application linéaire canoniquement associée,
- le rang de n'importe quelle application linéaire représentée par A,
- le rang des colonnes de A,
- le rang des lignes de A,
- le nombre de pivots non nuls après échelonnement de A en ligne comme en colonne,
- l'unique r tel que A est équivalente à $J_{n,p,r}$ (matrice avec que des 0 sauf une diagonale de r « 1 »).

Proposition 15 (Inversibilité d'une matrice)

Si A est une matrice carrée, A est inversible si et seulement si :

- il existe B telle que $AB = \mathrm{I}_n$,
- il existe B telle que $BA = \mathrm{I}_n$,
- $\mathrm{rg}(A) = n$,
- $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$,
- A représente un isomorphisme,
- A est équivalente en lignes ou en colonnes à l'identité,
- $\det(A) = 0$.

Proposition 16 (Méthodes de calcul de déterminant)

On rappelle les quelques méthodes fondamentales suivantes :

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
- utilisation de la n-linéarité,
- opérations élémentaires,
- développement selon une ligne ou une colonne.

2 Somme directe de n sous-espaces vectoriels

Proposition 17

Un produit cartésien de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels possède une structure naturelle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension égale à la somme des dimensions quand elles sont finies : $\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.

Définition 18

La somme d'une famille finie de sous-espaces $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ d'un espace E est l'image de l'application : $E_1 \times \cdots \times E_q \longrightarrow E, (x_1, \ldots, x_q) \longmapsto x_1 + \cdots + x_q$.

Lorsque cette application est injective, on dit que la somme est directe. On la note alors $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{q} E_i$ tandis que dans le cas général la somme est simplement notée $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} E_i$.

Remarque 19

- $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de F et $(g_1, \dots, g_p)$ une base de G.
- on a l'équivalence « $F + G$ est directe » et « $F \cap G = \{0_E\}$ ». C'est **très faux** dès trois sous-espaces.

Proposition 20

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i),$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Remarque 21

Si E est la somme directe de sous-espaces de dimensions finies, toute réunion de bases de ces sous-espaces constitue une base de E. Une telle base est dite adaptée à la somme directe. Inversement, si E est de dimension finie, toute partition d'une base de E fournit une décomposition de E en somme directe.

3 Sous-espaces stables et produit par blocs

Définition 22

On dit qu'un sous-espace F d'un espace E est stable par $u \in \mathscr{L}(E)$ lorsque $u(F) \subset F$.
En ce cas, l'endomorphisme induit par u sur F est $u_F : F \to F; x \mapsto u(x)$.

Proposition 23

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$ et si $\mathscr{B}$ est une base adaptée, un endomorphisme stabilise chacun des E_i si et seulement si sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs.

Proposition 24

Si deux endomorphismes f et g commutent, alors le noyau de f est stable par g.

Proposition 25

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs : Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$: $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_q \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$.

4 Polynômes de matrices et d'endomorphismes

Définition 26

Pour $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, on pose $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$.
On fait de même pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 27

On a : $(\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u)$ et $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Proposition 28

Le noyau d'un polynôme en u est stable par u.

Remarque 29

1. L'existence d'un polynôme annulateur de u permet de calculer u^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, par division euclidienne. Et, si u est inversible, d'obtenir u^{-1} par simple factorisation.
2. Enfin, si E est de dimension n, tout $u \in \mathscr{L}(E)$ admet un polynôme annulateur de degré $\leqslant n^2$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

5 Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

Définition 30

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii}$.

Proposition 31

1. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
2. Deux matrices semblables ont même trace.
3. On peut alors définir la trace d'un endomorphisme comme la trace de sa matrice dans n'importe quelle base (au départ et à l'arrivée).
4. La trace d'un projecteur égale son rang.

6 Autour de l'interpolation de Lagrange

Proposition 32

Si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des scalaires 2 à 2 distincts alors $P \mapsto (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n))$ définit un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 33

La famille des polynômes interpolateurs de Lagrange en $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ par cet isomorphisme. (C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$).

Proposition 34

Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des scalaires 2 à 2 distincts et $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ la base d'interplolation de Lagrange en ces points.

1. $\forall (b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1},\ \exists! P \in \mathbb{K}_n[X],\ \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i$.
2. soit $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, P_0 l'unique polynôme du point précédent. Alors
$$\{P \in \mathbb{K}[X],\ \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i\} = \{P_0 + AQ,\ Q \in \mathbb{K}[X]\},$$
où $A = \prod_{i=0}^{n} (X - a_i)$.
3. $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], P = P(a_0) L_0 + P(a_1) L_1 + \cdots + P(a_n) L_n$.

Remarque 35

$L_0 + L_1 + \cdots + L_n = 1$

Définition 36

La matrice de Vandermonde d'une famille de scalaires $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est la matrice de passage de la base des polynômes interpolateurs de Lagrange vers la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Le déterminant de Vandermonde est le déterminant de cette matrice.

Proposition 37 (Deux manières de calculer le déterminant de Vandermonde)

1. Le déterminant de Vandermonde, $\mathrm{V}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ se calcule par récurrence :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_1 - a_0 & a_1(a_1 - a_0) & \ldots & a_1^{n-1}(a_1 - a_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n - a_0 & a_n(a_n - a_0) & \ldots & a_n^{n-1}(a_n - a_0) \end{vmatrix}$$
$$= \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

2. En utilisant des polynômes.