Exercice 5 :

$U_{n+1} = \ln(1+U_n)$ et $U_0 > 0$

~~1) Croissante~~

1) Posons $g : x \longmapsto \ln(1+x)$

Alors $[0\,;+\infty[$ est stable par g, donc par récurrence, $U_n \geqslant 0$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$U_{n+1} - U_n = \ln(1+U_n) - U_n$

Or $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \leqslant x$, donc

$U_{n+1} < U_n$

Ainsi U_n décroît.

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante et minorée par 0, donc $\boxed{U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^+}$

Or par continuité, $\boxed{\ell = \ln(1+\ell)}$,

donc $\ell = 0$, ainsi U_n converge vers 0.

2) - On sait que $U_{n+1} = \ln(1+U_n)$

Donc $U_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} U_n - \frac{U_n^2}{2} + o(U_n^2)$

Donc $(U_{n+1} - U_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{U_n^2}{2}$

- Étudions alors la STG $\sum(U_{n+1} - U_n)$.

Cette série converge car U_n converge.

Donc par comparaison à signe constant,

la STG $\sum U_n^2$ converge.

3) Soit $V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n}$

$$V_n = \frac{U_n - U_{n+1}}{U_{n+1} U_n}$$

$$V_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{\frac{U_n^2}{2} + o(U_n^2)}{U_{n+1} U_n}$$

Donc $\boxed{V_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{U_n^2}{2 U_n^2} = \frac{1}{2}.}$ en utilisant le fait que $U_{n+1} \underset{n \to +\infty}{=} U_n - \frac{U_n^2}{2} + o(U_n^2)$

Ainsi, $\underline{(V_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}}$.

4) <u>Lemme de Cesaro</u>

Si $V_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$

Or $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

Donc $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{U_{k+1}} - \frac{1}{U_k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$

Somme télescopique :

$$\frac{\frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_0}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$$

Donc $\frac{1}{U_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$

Donc $\boxed{U_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n}}$

Exercice 7 :

1) On pose ~~$\forall n \in \mathbb{N}$~~, $P(n) =$ " $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} V_k = 1 - \frac{1}{(1+U_0)\cdots(1+U_n)}$ "

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $n = 0$.

$$\sum_{k=0}^{0} V_k = V_0 = \frac{U_0}{1+U_0} = \frac{1+U_0}{1+U_0} - \frac{1}{1+U_0}$$

$$\underline{V_0 = 1 - \frac{1}{1+U_0}}$$

La propriété est initialisée au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons la $P(n)$ vraie au rang n, regardons au rang $n+1$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} V_k = \sum_{k=0}^{n} V_k + V_{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+U_0)\cdots(1+U_n)} + V_{n+1} \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+U_0)\cdots(1+U_n)} + \frac{U_{n+1}}{(1+U_0)\cdots(1+U_{n+1})}$$

$$= 1 - \frac{(1+U_{n+1}) + U_{n+1}}{(1+U_0)\cdots(1+U_{n+1})} = \underline{1 - \frac{1}{(1+U_0)\cdots(1+U_{n+1})}}$$

Donc $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} V_k = 1 - \frac{1}{(1+U_0)\cdots(1+U_n)}}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{n}(1+U_k)}$

On a alors, $\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{\prod_{k=0}^{n} (1+U_k)}{\prod_{k=0}^{n+1} (1+U_k)} = \frac{1}{1+U_{n+1}}$

Or U_n est à terme positif, donc

$$1 + U_{n+1} > 1$$

$$\frac{1}{1+U_{n+1}} < 1 \quad \text{donc} \quad W_n > W_{n+1}$$

~~W_n est décroissante~~,

Comme $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, alors on obtient sa décroissance et W_n est minorée par 0. Donc $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\boxed{\sum_{k=0}^{n} V_k \text{ converge}}$

3) On va montrer que $V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C\,U_n$ avec $C \in \mathbb{R}$, en montrant que

$P_n = \prod_{k=0}^{n} (1+U_k)$ converge.

On veut prendre le logarithme ; Pb : a-t-on $(1+U_k) > 0$?

La STG $|U_k|$ converge par hypothèse, donc $U_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $1+U_k > 0$ à partir d'un certain rang $\$$.

Sans perte de généralité, on suppose que $1+U_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

$\ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+U_k)$

Or $\ln(1+U_k) \underset{k \to +\infty}{\sim} U_k$

Comme la STG U_k converge absolument, la STG $\ln(1+U_k)$ converge absolument aussi par comparaison.

Donc $\ln(p_n)$ converge ; $\ln(p_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$

Donc $\boxed{p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{\ell}}$

Comme $V_n = \dfrac{U_n}{p_n}$

$\boxed{V_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{U_n}{e^{\ell}}}$

Et comme $\sum |U_n|$ converge, par comparaison $\sum |V_n|$ converge.

Que dire sur p_n si...

→ $U_n > 0$ et que $\sum U_n$ diverge ?

↳ $\sum \ln(1+U_k)$ diverge donc $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

→ $-1 < U_n < 0$ $\forall n$ et $\sum U_n$ diverge ?

↳ $\sum \ln(1+U_k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$