17/09

TD 02

exercice 6

→ Nature de la série de terme general
$u_n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - \frac{\pi}{4}$

$\frac{n+1}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}$

formule de Taylor sur $f : x \longmapsto \mathrm{Arctan}(1+x)$

$\mathrm{Arctan}(1+x) \underset{x \to 0}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x + o(x)$

donc $\mathrm{Arctan}\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n-1} + o\left(\frac{1}{n-1}\right)$

donc $\mathrm{Arctan}\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) - \frac{\pi}{4} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n-1}$

$\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc, par comparaison à une série de Riemann divergente, $\sum u_n$ diverge

<u>Autre méthode</u> :

on va utiliser la formule $\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

donc $\tan(u_n) = \frac{\tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$= \frac{\frac{n+1}{n-1} - 1}{1 + \frac{n+1}{n-1} \times 1} = \frac{n+1-(n-1)}{n-1+n+1} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$

donc $\tan(u_n) = \frac{1}{n}$

or $0 \leq \mathrm{arctan}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \leq \frac{\pi}{2}$

donc $-\frac{\pi}{4} \leq u_n \leq \frac{\pi}{4}$

donc $u_n = \mathrm{arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc par comparaison à une serie de Riemann divergente, la stg $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge

rappel
$\tan(\mathrm{arctan}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{arctan}(\tan(\theta)) = \theta \quad \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

exercice 9

1. Montrer que $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2-1}$ $=S$ converge et calculer sa valeur

① $\frac{1}{k^2-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$

par comparaison à une série de Riemann convergente, S converge

② $\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$

- $\times (k-1)$ évalue en 1 : $a = \frac{1}{2}$
- $\times (k+1)$ évalue en -1 : $b = -\frac{1}{2}$

donc $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$

$\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}$

somme telescopique :
soit $n \geq 2$

$$-\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{2}\right) \times (-1)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$$
$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{3}{2}$$

finalement, $S = \frac{3}{4}$

2. Montrer que $\sum_{k \geq 1} \frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k}$ converge et calculer sa valeur

$u_k = \frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k}$

$k = 1$ $\lfloor \sqrt{2} \rfloor - \lfloor \sqrt{1} \rfloor = 0$
$k = 2$ $\lfloor \sqrt{3} \rfloor - \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 0$
$k = 3$ $\lfloor \sqrt{4} \rfloor - \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$
$k = 4$ $\lfloor \sqrt{5} \rfloor - \lfloor \sqrt{4} \rfloor = 0$

On remarque que $\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor = 0$
sauf si $k+1 = p^2$ où $p \in \mathbb{N}$

soit $k \in \mathbb{N}$:

- si $k+1 = p^2$ où $p \in \mathbb{N}$,

$\sqrt{k+1} = p$ et $\sqrt{k} = \sqrt{p^2 - 1}$

donc $p - 1 \leq \sqrt{k} \leq p$

Donc $\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor = p - (p-1) = 1$

- sinon, on dispose de p tq

$$p^2 \leq k < k+1 < (p+1)^2$$

donc $\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor = p - p = 0$

en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

on remarque que

$$S_{n^2} = \sum_{k=1}^{n^2} u_k$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n^2 \\ k+1 = p^2,\ p \in [\![1, n]\!]}} u_k$$ → on somme juste n termes

$$= \sum_{p=1}^{n} \frac{\lfloor \sqrt{p^2} \rfloor - \lfloor \sqrt{p^2 - 1} \rfloor}{p^2 - 1}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2 - 1}$$

en fait, $S_n = \sum_{p=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{p^2 - 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{3}{4}$ par question 1