DM 02
à rendre au plus tard le mercredi 18 septembre
D'après oral Centrale python MP 18/oral Centrale python PSI 24

Ce problème est inspiré d'oraux de concours, notamment d'oraux de Centrale Maths II. Dans cet oral, il faut faire des simulations en python. N'hésitez pas à consulter, à ce titre, l'aide-mémoire python que j'ai mis sur cahier-de-prépa !

1. Démontrer qu'il existe un réel γ tel que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Correction

Le plus simple est vraiment ce qu'on a fait en cours.
On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et on montre que la suite (u_n) converge, en montrant que la série $u_{n+1} - u_n$ converge. Or,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2},
\end{aligned}$$

qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Donc, par comparaison à une série à termes positifs, $\sum u_{n+1} - u_n$ converge, donc (u_n) converge. Donc on dispose d'un réel γ vérifiant $\boxed{H_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma}$, d'où le résultat désiré.

2. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

Correction

La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est positive, décroissante, tend vers 0, donc, par le critère des séries alternées, $\boxed{\text{la série de terme général } \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ converge.}}$

Un premier réarrangement Dans la série harmonique alternée, on prend p termes positifs, puis q négatifs, puis p positifs, et ainsi de suite... On note S_n la n-ième somme partielle de cette série et $T_k = S_{k(p+q)}$. Par exemple, pour $p = 2$ et $q = 3$, $T_2 = S_{10} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}$.

3. Écrire et commenter une fonction python `S(n,p,q)` donnant la valeur de S_n. Donner les valeurs obtenues pour $n = 1000$ et $(p,q) \in \{(2,2),(2,3),(3,2)\}$.

Correction

On propose le programme suivant, basé sur l'observation que

$$\mathtt{S(p,q,n)} = \sum_{k=0}^{\mathtt{Kp}} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{\mathtt{Kq}} \frac{1}{2k},$$

où `Kp` est le nombre de termes impairs que l'on va prendre et `Kq` le nombre de termes pairs. Ces nombres valent $p \times \left\lfloor \frac{n}{p+q} \right\rfloor$ et $q \times \left\lfloor \frac{n}{p+q} \right\rfloor$, auxquels on rajoute les termes manquants pour arriver jusqu'à n.

```python
def S(p,q,n):
    s,t = n//(p+q),n%(p+q)
    Kp = p*s
    Kq = q*s
    if t<p:
        Kp += t
    else:
        Kp += p
        Kq += t-p
    res = 0
    for k in range(Kp):
        res += 1/(2*k+1)
    for k in range(1,Kq+1):
        res -= 1/(2*k)
    return res
```

On obtient les résultats suivants

```python
>>> S(2,2,1000)
0.6926474305598131

>>> S(2,3,1000)
0.4899982057880965

>>> S(3,2,1000)
0.8952550529008675
```

4. Trouver une expression de T_k en fonction de H_{2kp}, H_{kp} et H_{kq}.

Correction

On écrit que

$$\begin{aligned}
T_k &= \sum_{i=1}^{pk} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^{qk} \frac{1}{2i} \\
&= \sum_{i=1}^{2pk} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{pk} \frac{1}{2i} - \sum_{i=1}^{qk} \frac{1}{2i} \\
&\boxed{= H_{2pk} - \frac{1}{2} H_{kp} - \frac{1}{2} H_{kq}.}
\end{aligned}$$

5. En déduire la convergence de la suite (T_k), puis celle de la suite (S_n), vers une limite que l'on exprimera en fonction de p et q. Comparer avec les résultats obtenus en 3.

Correction

On en déduit que

$$\begin{aligned}
T_k &\underset{k\to+\infty}{=} \ln(2pk) + \gamma - \frac{1}{2}\ln(kp) - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\ln(kq) - \frac{1}{2}\gamma + o(1) \\
&\underset{k\to+\infty}{=} \ln\left(\frac{2p}{\sqrt{pq}}\right) + o(1) \\
&\boxed{\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right).}
\end{aligned}$$

Soit maintenant $n \geqslant p+q$. On pose : $k_n = \left\lfloor \frac{n}{p+q} \right\rfloor$, et on a $(p+q)k \leqslant n < (p+q)(k+1)$. Ainsi S_n et T_{k_n} diffèrent d'au plus $p+q$ termes, et ces derniers sont tous plus petits que $\frac{1}{2\min(p,q)N}$. Donc :

$$|S_n - T_{k_n}| \leqslant \frac{p+q}{2\min(p,q)k_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Donc $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right).}$

C'est tout à fait cohérent !

```python
def f(p,q):
    return np.log(2*np.sqrt(p/q))
```

```
>>> f(2,2)
0.6931471805599453

>>> f(2,3)
0.4904146265058631

>>> f(3,2)
0.8958797346140274
```

nlaillet.math@gmail.com

Une autre série alternée Soit $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$.

6. Montrer que la série de terme général u_n converge.

Correction

Si on étudie la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$, on remarque que f est dérivable et que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$, qui est négative dès que $x > \mathrm{e}$. Ainsi, f décroît à partir d'un certain réel, donc $\dfrac{\ln(n)}{n}$ décroît à partir d'un certain rang. Elle est, de plus, positive et tend vers 0 par croissances comparées donc, d'après le critère des séries alternées, la série de terme général u_n converge.

7. Proposer, en la justifiant, une méthode pour déterminer, informatiquement, une approximation numérique de la somme à 10^{-2} près. On ne demande pas nécessairement de programme explicite.

Correction

Notons R_n le reste d'ordre n. Alors on sait que $|R_n| \leqslant |u_n| = \dfrac{\ln(n)}{n}$. Ainsi, dès que $\dfrac{\ln(n)}{n} < 10^{-2}$, on sait que S_n est une approximation de la somme à 10^{-2} près. Il suffit donc de déterminer un seuil n pour lequel $\dfrac{\ln(n)}{n} < 10^{-2}$ et on aura ainsi notre approximation.

8. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} u_k = (\ln 2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$.

Correction

Calculons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} u_k &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p-1)}{2p-1} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p} \\
&= 2\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2)+\ln(p)}{p} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2)}{p} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(p)}{p} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&\boxed{= \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2)}{p} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}.}
\end{aligned}$$

Il s'agit du résultat demandé.

9. Via une comparaison série-intégrale, montrer que pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k} = \ln(2)\ln(n) + \frac{1}{2}(\ln(2))^2 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Correction

Notons $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est décroissante (à partir de e), donc, si $k \geqslant 2$, on peut écrire que

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}dx \leqslant \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}dx,$$

d'où, en sommant pour k allant de $n+1$ à $2n$,

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{\ln(x)}{x}dx \leqslant v_n \leqslant \int_{n}^{2n} \frac{\ln(x)}{x}dx,$$

d'où, en intégrant effectivement,

$$\frac{1}{2}\left(\ln(2n+1)^2 - \ln(n+1)^2\right) \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\ln(2n)^2 - \ln(n)^2\right)$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\ln(2n)^2-\ln(n)^2\right) &= \frac{1}{2}\left(\ln(2n)-\ln(n)\right)\left(\ln(2n)+\ln(n)\right)\\ &= \frac{\ln(2)(\ln(2)+\ln(n))}{2}\\ &= \frac{\ln(2)^2}{2}+\ln(2)\ln(n).\end{aligned}$$

Ensuite, montrons que le membre de gauche est proche du membre de droite à $O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ près :

$$\begin{aligned}\ln(2n+1)^2 &= \left(\ln(2n)+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)^2\\ &= \ln(2n)^2\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\ln(2n)}\right)^2\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2n)^2\left(1+\frac{\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln(2n)}\right)^2\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2n)^2\left(1+\frac{1}{2n\ln(2n)}+o\left(\frac{1}{n\ln(2n)}\right)\right)^2\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2n)^2\left(1+\frac{1}{n\ln(2n)}+o\left(\frac{1}{n\ln(2n)}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2n)^2+\frac{\ln(2n)}{n}+o\left(\frac{\ln(2n)}{n}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2n)^2+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\end{aligned}$$

On a le même résultat pour $\ln(n+1)^2$, donc

$$\frac{1}{2}\left(\ln(2n+1)^2-\ln(n+1)^2\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{\ln(2)^2}{2}+\ln(2)\ln(n)+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right),$$

d'où

$$v_n\underset{n\to+\infty}{=}\frac{\ln(2)^2}{2}+\ln(2)\ln(n)+O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

10. Déterminer alors la valeur exacte de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}u_k$.

Correction

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} u_k &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2)\left(\ln(n)+\gamma+o(1)\right) - \left(\frac{\ln(2)^2}{2} + \ln(2)\ln(n) + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2)\gamma - \frac{\ln(2)^2}{2} + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)\gamma - \frac{\ln(2)^2}{2}.\end{aligned}$$

Comme on sait déjà que la série de terme général u_k converge, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \ln(2)\gamma - \frac{\ln(2)^2}{2}.}$$

Un réarrangement d'une autre série Soit $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

11. Montrer l'existence d'un réel c tel que $V_n = 2\sqrt{n} + c + o(1)$.

Correction

Là, comme dans le cours, on ne va pas faire de comparaison série-intégrale !
Considérons la suite $w_n = v_n - 2\sqrt{n}$. On va montrer que w_n converge en montrant que la série de terme général $w_{n+1} - w_n$ converge. Or,

$$\begin{aligned}w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\\ &\boxed{\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n^{3/2}}.}\end{aligned}$$

Par comparaison à une série absolument convergente, on en déduit que la série de terme général $w_{n+1} - w_n$ converge, donc que la suite w_n converge, vers $c \in \mathbb{R}$. Le résultat d'en suit alors.

12. On considère la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ dans laquelle on réordonne les termes comme dans la deuxième partie. Montrer que si $p \neq q$ alors la série obtenue est divergente.

Correction

Supposons $p \neq q$. Alors, en notant T_k la somme partielle s'arrêtant à $k(p+q)$, on obtient

$$\begin{aligned}
T_k &= \sum_{i=1}^{kp} \frac{1}{\sqrt{2i-1}} - \sum_{i=1}^{kq} \frac{1}{\sqrt{2i}} \\
&= \sum_{i=1}^{2kp} \frac{1}{\sqrt{i}} - \sum_{i=1}^{kp} \frac{1}{\sqrt{2i}} - \sum_{i=1}^{kq} \frac{1}{\sqrt{2i}} \\
&= V_{2kp} - \frac{V_{kp}}{\sqrt{2}} - \frac{V_{kq}}{\sqrt{2}} \\
&\underset{k\to+\infty}{=} 2\sqrt{2kp} + c - \frac{2\sqrt{kp}+c}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{kq}+c}{\sqrt{2}} + o(1) \\
&\underset{k\to+\infty}{=} \sqrt{k} \times \left(2\sqrt{2}\sqrt{p} - \sqrt{2}\sqrt{p} - \sqrt{2}\sqrt{q}\right) + c(1-\sqrt{2}) + o(1) \\
&\underset{k\to+\infty}{=} \sqrt{2k} \times (\sqrt{p} - \sqrt{q}) + c(1-\sqrt{2}) + o(1)
\end{aligned}$$

Ainsi, si $p \neq q$, la somme T_k diverge. (si $p = q$, T_k converge, mais on n'a pas de garantie que c'est vrai pour la somme S_n quelconque)

Un réarrangement plus subtil Dans la série harmonique alternée, on prend maintenant le premier terme, puis un négatif, puis 2 positifs, puis un négatif, puis 3 positifs, puis un négatif, puis 4 positifs, et ainsi de suite... On note a_n le terme général de cette suite et on note toujours $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Par exemple, $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{5}$, et $S_8 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}$.

13. Déterminer $\varphi(n)$ le rang du n-ième terme négatif (par exemple, $\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 5$).

Correction

On remarque que $\varphi(n+1) = \varphi(n) + n + 1$. Ainsi,

$$\varphi(n) = \sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{(n+1)(n+2)-2}{2} = \boxed{\frac{n^2+3n}{2}.}$$

14. Montrer que : $S_{\varphi(n+1)} - S_{\varphi(n)} \geqslant \frac{n}{2(n+1)(n+2)}$.

Correction

On sait qu'entre $S_{\varphi(n+1)}$ et $S_{\varphi(n)}$, il n'y a que des termes positifs, sauf au rang $\varphi(n+1)$. Ainsi,

$$S_{\varphi(n+1)} - S_{\varphi(n)} = -\frac{1}{2(n+1)} + \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)-1} a_k.$$

Il faut donc trouver qui sont les a_k entre $\varphi(n)+1$ et $\varphi(n+1)-1$. Le terme après $\varphi(1)$ est $\frac{1}{3}$, celui après $\varphi(2)$ est $\frac{1}{7}$, celui après $\varphi(3)$ est $\frac{1}{13}$. De manière générale, jusqu'à $\varphi(n)$, on a pris $\frac{n(n+1)}{2}$ termes impairs. Celui qui vient ensuite est donc le $\frac{n(n+1)}{2}+1$-ème, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right)-1} = \frac{1}{n(n+1)+1} = \frac{1}{n^2+n+1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
S_{\varphi(n+1)} - S_{\varphi(n)} &= -\frac{1}{2(n+1)} + \sum_{k=\frac{n(n+1)}{2}+1}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \frac{1}{2k-1} \\
&\geqslant -\frac{1}{2(n+1)} + \sum_{k=\frac{n(n+1)}{2}+1}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \frac{1}{(n+1)(n+2)-1} \\
&\geqslant -\frac{1}{2(n+1)} + \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}}{(n+1)(n+2)-1} \\
&\geqslant -\frac{1}{2(n+1)} + \frac{(n+1)}{(n+1)(n+2)-1} \\
&\geqslant -\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+2} \\
&\boxed{\geqslant \frac{n}{2(n+1)(n+2)}.}
\end{aligned}$$

15. En déduire que la limite de S_q quand q tend vers l'infini.

Correction

Par la question précédente, $S_{\varphi(n+1)} - S_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, terme général d'une série divergente. On en déduit, par le lien suite-série, que $S_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Or, $(S_q)_{q\in\mathbb{N}}$ croît entre $\varphi(n)$ et $\varphi(n+1)-1$. Ainsi, si $S_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on peut en déduire que $S_q \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.