PSI – Programme de colles
Semaine 02 – du 23 au 27 septembre 2024

Programme en bref

- intégrales : révisions de la semaine précédente.
- **séries numériques : le cœur du programme**
- révisions d'algèbre linéaire : espaces vectoriels, applications linéaires, matrices. Questions de cours seulement !

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. Une série absolument convergente est convergente.
2. Séries de Riemann.
3. Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.
4. Critère des séries alternées.
5. Exemple d'étude d'une série alternée avec la série de terme général $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.
6. Énoncé du produit de Cauchy (la preuve est HP) + application à $\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}$.

7. Une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre.
8. Théorème du rang (en admettant le théorème d'isomorphisme).
9. Théorème de structure des solutions de $f(x) = y$.
10. Si $p \circ p = p$, alors $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - Id) = E$.
11. SI $s \circ s = Id$, alors $\mathrm{Ker}(s - Id) \oplus \mathrm{Ker}(s - Id) = E$.
12. Matrices de la base canonique, définition et produit de deux matrices de la base canonique.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Intégration sur un intervalle quelconque

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions continues par morceaux	
Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.	Notations $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration n'est pas exigible. L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Changement de variable : si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si f est continue sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.
d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $I = [a,b[$, (respectivement $]a,b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).
Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est continue, intégrable et positive sur I, et si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.	
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: — si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f. — si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque. Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.
Fonctions de référence : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, — intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ; — étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ en $+\infty$.	L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.

Compléments sur les séries numériques

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Compléments sur les séries numériques	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone.
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	La démonstration n'est pas exigible.
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	La démonstration n'est pas exigible.

Révisions d'algèbre linéaire

— sous-espaces vectoriels, familles libres/génératrices/bases, cas de la dimension finie.

— applications linéaires, noyau, image, théorème de structure, théorème du rang, projecteurs, symétries, formes linéaires.

— matrices, règles de calcul, application linéaire associée à une matrice, représentation matricielle d'applications linéaires.