PSI

Mathématiques
DS 01

Samedi 21 septembre – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le soin et la présentation seront pris en compte dans la notation. **Mettez en valeur vos résultats** et **numérotez vos pages**.
- Le **correcteur blanc** (liquide ou en ruban) est **interdit** : toute utilisation entraînera une non-correction de la question.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir et pour y mettre les numéros des questions.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice ou de partie.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.

♫ Bon courage ! ♫

Problème 1. Étude d'une série de restes – E3A MP 99

1. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{p-1}}{p}$ converge.

2. On note $R_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p}$. Donner le signe de R_n ainsi qu'un bon majorant de $|R_n|$.

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n dt$ et démontrer que : $\forall a > 0,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^a} dt \leqslant \frac{1}{n}$.

4. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall N \geqslant n+1, \sum_{k=n+1}^{N} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{1+t} dt,$$

puis que : $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$. Que vaut, en particulier, $\displaystyle\sum_{p \geqslant 1} \frac{(-1)^{p-1}}{p}$?

5. Par intégration par parties, montrer qu'il existe un entier $\beta \in \mathbb{N}^*$ et un réel K différent de 0 tel que $R_n \underset{n \to +\infty}{=} K \dfrac{(-1)^n}{n^\beta} + O\left(\dfrac{1}{n^{\beta+1}}\right)$

6. En déduire la nature de la série de terme général R_n.

Problème 2. Un problème, deux points de vue

A. Du point de vue des intégrales – E3A PSI 2020

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} \mathrm{d}t$, lorsque cela existe.

1. **Dans cette question, et uniquement cette question**, f est la fonction $t \mapsto \cos\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)$.
   - 1.1. En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.
   - 1.2. En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.
   - 1.3. Donner alors un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.
2. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$.
3. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t)) \mathrm{d}t$.
   - 3.1. Justifier que H_λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $H_\lambda'(x)$.
   - 3.2. Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et que $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} \mathrm{d}t$.

4. Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique ($T > 0$).

   4.1. Démontrer que la fonction φ qui à tout réel x associe $\varphi(x) = \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$ est constante.

   Montrer alors que l'on a, pour tout réel x : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

   4.2. Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

   4.3. Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbb{R}$.

   4.4. Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ converge.

   4.5. Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\mathrm{d}t$ et $B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t}\mathrm{d}t$.

   5.1. Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n.

   5.2. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.

   5.3. Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

   5.4. On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.

      i. Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question 4.

      ii. En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

B. Du point de vue des séries – EM Lyon MP/PC/PSI 2022

Soit d un entier, $d \geqslant 2$. Soit $\omega = (\omega_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes, périodique de période d, c'est-à-dire telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \omega_{n+d} = \omega_n.$$

Dans ce problème, on s'intéresse à la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n(\lambda)$ de terme général

$$\forall n \geqslant 1 \qquad u_n(\lambda) = \frac{\omega_n + \lambda}{n}$$

où λ est un complexe. On note plus simplement $u_n = u_n(0)$ pour tout $n \geqslant 1$.

6. Supposons, dans cette question uniquement, qu'il existe un complexe λ tel que $\sum u_n(\lambda)$ converge. Montrer que, pour toute valeur $\mu \neq \lambda$, la série $\sum u_n(\mu)$ diverge.

7. Dans cette question, on choisit $\lambda = 0$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n la somme partielle associée à la série $\sum u_n$, c'est-à-dire $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{k}$.

7.1. Pour tout entier naturel m, exprimer $\frac{1}{md+1} \sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k}$ en fonction de $\Omega = \sum_{k=1}^{d} \omega_k$.

7.2. Déterminer un réel α tel que

$$\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md} = \frac{1}{md+1} \sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} + \frac{\alpha}{m^2} + \underset{m\to\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{1}{m^2} \right).$$

7.3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur Ω pour que la série $\sum \left(\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md}\right)$ converge.

7.4. Montrer très *soigneusement* que la condition obtenue à la question précédente est une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ converge.

8. Montrer qu'il existe une unique valeur $\lambda \in \mathbf{C}$ telle que la série $\sum u_n(\lambda)$ converge.

9. **Une généralisation** Dans cette question, on se donne une suite croissante $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels, telle que $a_1 > 0$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. On suppose que $\Omega = 0$. On pose, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{\omega_n}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k.$$

Par souci de commodité, on note également $\mathrm{T}_0 = 0$.

9.1. Montrer que la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

9.2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) + \frac{\mathrm{T}_n}{a_{n+1}}.$$

9.3. Montrer que la série $\sum \mathrm{T}_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$ converge.

9.4. Montrer que la série $\sum u_k$ converge.