 nlaillet.math@gmail.com

Semaine 02 – Colle du lundi 23/09 à 8h

Nom	Énoncé et commentaires	Note
	Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n)$ **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $\varepsilon_n \in \{0,1\}$. Montrer que $\sum \varepsilon_n u_n$ converge. On note S sa somme. Montrer que $S \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On définit une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence en posant • si $x \leqslant \frac{\pi}{4}, \varepsilon_0 = 0, \text{sinon}\, \varepsilon_0 = 1,$ • pour $n \in \mathbb{N}$, si $x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k + u_{n+1}$, alors $\varepsilon_{n+1} = 0, \text{sinon}\, \varepsilon_{n+1} = 1$. **2. [Py]** Écrire une fonction Python Suite qui prend en argument x et n et qui renvoie $\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k$. La fonction Arctan est atan en Python. **3. [Py]** La tester avec différentes valeurs de x pour $n = 100$, puis $n = 1000$ et $n = 10000$. **4.** Que peut-on conjecturer ? On va chercher à montrer le résultat. **5.** Démontrer que pour tout n, $u_{n+1} \leqslant \sum_{k=n+2}^{+\infty} u_k$. **6.** Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n \leqslant x \leqslant S_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, et conclure.	
	1. Question de cours. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $\ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E) = E$. **2.** Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ fonction décroissante de limite nulle en $+\infty$. On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin t \; \mathrm{d}t$$ Étudier la nature de la série $\sum u_n$ puis la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \sin t \; \mathrm{d}t$.	
	1. Question de cours. Série de terme général $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. **2.** Le but de l'exercice est de prouver la relation suivante : $$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$ (a) Prouver la convergence de l'intégrale et de la série. (b) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, l'intégrale $\mathrm{I}_k = \int_0^1 t^k \ln t dt$ converge, puis calculer I_k. (c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt - \int_0^1 \frac{t^{2n+2} \ln t}{t^2-1} dt$. (d) Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{t^2 \ln t}{t^2-1}$ se prolonge par continuité en 0 et en 1. En déduire qu'il existe une constante $M > 0$, qu'on ne cherchera pas à calculer, telle que, pour tout $t \in]0,1[$, $\left\| \frac{t^2 \ln t}{t^2-1} \right\| \leqslant M$. (e) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n+2} \ln t}{t^2-1} dt = 0$, puis la relation demandée.	