TD 03
Révisions d'algèbre linéaire

1 Matrices par blocs, sous-espaces stables

Exercice 1. *CCINP 22*. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et f un endomorphisme d'un espace E, représenté par A dans une base $\mathscr{B}$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker}\left(f^2\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f - 2\operatorname{Id}_E\right)$.

Correction

Faisons des calculs concrets : f^2 est représenté par la matrice

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si $X \in E$ est représenté par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a les équivalences

$$X \in \ker(f) \Leftrightarrow A^2X = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - 2z = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0.$$

Ainsi, $\ker(f^2)$ est un hyperplan, d'équation $x + y - z = 0$.
On a aussi les équivalences

$$\begin{aligned}
X \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) &\Leftrightarrow (A - 2\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -2z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Or, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \notin \ker(f^2)$ donc, comme $\ker(f^2)$ est un hyperplan,

$$\ker(f^2) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}) = E.$$

2. Trouver un vecteur de Ker $\left(f^2\right)$ qui ne soit pas dans Ker(f).

Correction

On remarque que $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \notin \ker(f)$ et pourtant $1 + 0 - 1 = 0$.

3. Trouver une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle f soit représenté par $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction

(on identifie les vecteurs et leur représentation par des éléments de $\mathbb{R}^3$)
On sait que f n'est pas inversible donc $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$. Comme $\ker(f) \neq \ker(f^2)$ on sait que $\dim(\ker(f)) = 1$. On prend le vecteur $e_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ trouvé précédemment. Alors $e_1 = f(e_2) \in \ker(f)$ (et (e_1, e_2) est clairement libre), donc (e_1, e_2) est une base de $\ker(f^2)$. On prend ensuite $e_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ qui est une base de $\ker(f - 2\mathrm{Id})$. Par la supplémentarité démontrée en début d'exercice, on sait que (e_1, e_2, e_3) est une base de E. Dans cette base, la matrice de f est exactement la matrice désirée.

4. Montrer que si un endomorphisme g commute avec f alors Ker $\left(f^2\right)$ est stable par g.

Correction

Soit $x \in \ker(f^2)$. Alors $f^2(g(x)) = f^2 \circ g(x) = g \circ f^2(x) = 0$ donc $g(x) \in \ker(f^2)$.

5. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g tel que $g \circ g = f$.

Correction

Supposons qu'il existe un tel g. Alors g commute avec f donc il stabilise $F = \ker(f^2)$.
On peut donc considérer $u = f_F$ et $v = g_F$. Alors $u = v \circ v$.
On a $u^2 = 0_{\mathscr{L}(F)}$ donc $v^4 = 0_{\mathscr{L}(F)}$, donc v est nilpotente, donc $v^{\dim(F)} = 0_{\mathscr{L}(F)}$, i.e. $v^2 = 0_{\mathscr{L}(F)}$ donc $u = 0_{\mathscr{L}(F)}$, **absurde !** D'où le résultat demandé.

Exercice 2. *CCINP 24*. Soit $(A_1, A_2, A_3, A_4) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^4$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $\text{rg}(A) \leqslant \text{rg}(B_1) + \text{rg}(B_2)$; puis que : $\text{rg}(A) \leqslant \sum_{k=1}^{4} \text{rg}(A_k)$.

Correction

Notons $C_1, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots, C_{2n}$ les colonnes de A. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots C_{2n}) \\ &= \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots C_{2n})) \\ &\leqslant \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) + \mathrm{Vect}(C_{n+1}, \dots C_{2n})) \\ &\leqslant \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)) + \dim(\mathrm{Vect}(C_{n+1}, \dots C_{2n})) \text{ par la formule de Grassmann} \\ &\leqslant \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_n) + \mathrm{rg}(C_{n+1}, \dots, C_{2n}) = \mathrm{rg}(B_1) + \mathrm{rg}(B_2). \end{aligned}$$

Ensuite, en raisonnant de même sur les lignes de B_1, on montre que $\mathrm{rg}(B_1) \leqslant \mathrm{rg}(A_1) + \mathrm{rg}(A_3)$ puis que $\mathrm{rg}(B_2) \leqslant \mathrm{rg}(A_2) + \mathrm{rg}(A_4)$. Le résultat s'ensuit alors.

2. Montrer que si $\text{rg}(A_1) = \text{rg}(A_4) = n$ et $A_3 = 0$, A est inversible. Que vaut alors A^{-1} ?

Correction

Si $A_3 = 0$, alors $\det(A) = \det(A_1)\det(A_4) \neq 0$, car $\mathrm{rg}(A_1) = n$ et $\mathrm{rg}(A_4) = n$ donc A_1 et A_4 sont inversibles. Donc A est inversible. On cherche alors l'inverse de A sous la forme $\begin{pmatrix} A_1^{-1} & D \\ 0_n & A_4^{-1} \end{pmatrix}$. En calculant

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1} & D \\ 0_n & A_4^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_n & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & A_1^{-1}A_2 + DA_4 \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

Il faut (et il suffit) alors de prendre $A_1^{-1}A_2 + DA_4 = 0_n$ donc $D = -A_1^{-1}A_2A_4^{-1}$. Donc

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2A_4^{-1} \\ 0_n & A_4^{-1} \end{pmatrix}.}$$

Exercice 3. *Mines 24*. Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible. Calculer alors M^{-1}.

Correction

Notons $C_1, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots C_{2n}$ les colonnes de M. Pour calculer le déterminant de A, on fait les opérations $C_{n+i} \leftarrow C_{n+i} - C_i$ pour i allant de 1 à n et on obtient

$$\det(M) = \begin{vmatrix} A & 0_n \\ A & B - A \end{vmatrix} = \det(A)\det(B - A).$$

On en déduit que M est inversible si et seulement si A et $B - A$ sont inversibles. Pour trouver l'inverse de M, je remarque que

$$\begin{pmatrix} A & 0_n \\ A & B-A \end{pmatrix} = M \times T,$$

où $T = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$, d'inverse $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ A & B-A \end{pmatrix} \times T^{-1} \text{ donc } M^{-1} = T \times \begin{pmatrix} A & 0_n \\ A & B-A \end{pmatrix}^{-1}.$$

Or, pour calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ A & B-A \end{pmatrix}$, on sait que cet inverse va être triangulaire par blocs : on le cherche sous la forme $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0_n \\ C & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}$. Or,

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0_n \\ C & (B-A)^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0_n \\ A & B-A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_n \\ CA + (B-A)^{-1}A & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

En prenant $C = -(B-A)^{-1}$, on obtient donc l'inverse désiré. Donc

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & 0_n \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} + (B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}}$$

Exercice 4. *Centrale 24*. Soit f un endomorphisme d'un C-espace vectoriel E de dimension n. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $r_k = \text{rg}\left(f^k\right)$.

1. Montrer que la suite (r_k) est décroissante et stationnaire.

Correction

On remarque que si $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$ (car si $y = f^{k+1}(x)$, alors $y = f^k(f(x))$). Ainsi, (r_k) est une suite d'entiers positifs décroissante. Minorée par 0, elle converge. Elle est donc stationnaire (si elle ne l'était pas, elle diminuerait de 1 une infinité de fois, ce qui est absurde).

2. En considérant $g_k : \left| \begin{array}{c} f^k(E) \to f^{k+1}(E) \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$, montrer que la suite $(r_k - r_{k+1})$ est décroissante.

Correction

Suivons l'indication et considérons une telle application linéaire. En appliquant le théorème du rang à g, on obtient

$$\mathrm{rg}(g_k) + \dim(\ker(g)) = \dim(f^k(E)) = r_k.$$

Mais $\mathrm{rg}(g_k) = \dim(f(f^k(E)) = \dim(f^{k+1}(E)) = r_{k+1}$. Ainsi,

$$r_k - r_{k+1} = \dim(\ker(g_k)).$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Mais
$$\ker(g_k) = \{y \in f^k(E),\ f(y) = 0\} = f^k(E) \cap \ker(f).$$
Comme $f^k(E)$ décroît (pour l'inclusion), $f^k(E) \cap \ker(f)$ aussi, donc $\dim(\ker(g_k))$ aussi, donc $(r_k - r_{k+1})$ aussi !

Exercice 5. *Mines 24*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice n.

1. Justifier l'existence d'un vecteur $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X_0 \neq 0$. En déduire que la famille $\left(X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0\right)$ est libre.

Correction

Comme $A^{n-1} \neq 0_n$, on en déduit qu'il existe $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X \neq 0$. Soit alors $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i X_0 = 0.$$

Si $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$, soit k le plus petit indice tel que $\lambda_k \neq 0$. Alors

$$\lambda_k A^k X_0 + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1} X_0 = 0,$$

donc, en multipliant par A^{n-1-k}, on obtient

$$\lambda_k A^{n-1} X_0 + \lambda_{k+1} \underbrace{A^n X_0}_{=0_n} + \lambda_{k+2} \underbrace{A^{n+1} X_0}_{=0_n} + \dots = 0_n,$$

soit $\lambda_k A^{n-1} X_0 = 0_n$ donc, comme $A^{n-1}X_0 \neq 0$, $\lambda_k = 0$, ce qui est absurde ! Donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) = (0, \dots, 0)$.

2. Montrer que A est semblable à $J_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction

Comme la famille $(X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0)$ est une famille libre de n éléments, c'est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Dans cette base, la matrice de $f_A : X \mapsto AX$ est de la forme donnée par l'énoncé, ce qui signifie que A est semblable à la matrice donnée par l'énoncé.

On note, si N est nilpotente d'indice p, $\mathrm{e}^N = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{N^k}{k!}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\lambda \left(e^{J_n} - \mathrm{I}_n\right)$ est nilpotente. Préciser son indice de nilpotence.

Correction

On remarque que

$$\mathrm{e}^{J_n} - \mathrm{I}_n = \sum_{\boxed{k=1}}^{n-1} \frac{J_n^k}{k!} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ & 0 & 1 & \frac{1}{2} & & & \frac{1}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & (0) & & \ddots & 1 & \frac{1}{2} \\ & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}^{\top}$$

On a alors une matrice triangulaire inférieure stricte, avec une sous-diagonale non nulle, elle est nilpotente d'indice $n-1$.

4. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\lambda I_n + J_n = \lambda P^{-1} e^{J_n} P$.

Correction

On sait que $\lambda(\mathrm{e}^{J_n} - \mathrm{I}_n)$ est nilpotente d'indice n, donc est semblable à J_n : on dispose de P telle que

$$\lambda \mathrm{e}^{J_n} - \lambda \mathrm{I}_n = P J_n P^{-1}.$$

Ainsi,

$$J_n = \lambda P^{-1} \mathrm{e}^{J_n} P - \lambda P^{-1} \mathrm{I}_n P = \lambda P^{-1} e^{J_n} P - \lambda \mathrm{I}_n.$$

Le résultat est ainsi prouvé.

5. En déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\lambda I_n + J_n = e^B$.

Correction

Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} P^{-1} \mathrm{e}^{J_n} P &= P^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{J_n^k}{k!} P \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{P^{-1} J_n^k P}{k!} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(P^{-1} J_n P)^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{P^{-1} J_n P}, \end{aligned}$$

car $P^{-1} J_n P$ est aussi nilpotente d'indice $n-1$.

Exercice 6. *Mines 24, ex-X MP*. Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$

nilpotent, F est sous-espace vectoriel de E tel que $u(F) \subset F$. On suppose que $E = F + \mathrm{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.
Indication donnée par l'examinateur : montrer que pour tout k, $E = F + Im(u^k)$.

Correction

Montrons le résultat de l'indication par récurrence. L'initialisation est évidente (pour $k = 0$, $u^0 = \mathrm{Id}_E$).
Pour l'hérédité, supposons le résultat vrai au rang k. Soit x dans E. Par hypothèse de récurrence, on dispose de f dans F et de w dans E tels que $x = f + u^k(w)$.
Mais $w \in E$ donc, comme $E = F + \mathrm{Im}(u)$, on dispose de f' dans F et de α dans E tels que $w = f' + u(\alpha)$.
Alors

$$x = f + u^k(f' + u(\alpha)) = \underbrace{f + \underbrace{u^k(f')}_{\in F}}_{\in F} + u^{k+1}(\alpha) \in F + \mathrm{Im}(u^{k+1}).$$

D'où l'hérédité et le résultat. En particulier, $E = F + \mathrm{Im}(u^n) = F$.

Exercice 7. *Centrale 24*. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$ tels que : $(f - a\mathrm{Id}) \circ (f - b\mathrm{Id}) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Déterminer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(f - a\mathrm{Id})$ et $\mu(f - b\mathrm{Id})$ soient des projecteurs non nuls.

Correction

On sait que $(f - a\mathrm{Id}) \circ (f - b\mathrm{Id}) = 0$, donc

$$f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{Id} = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Soit λ dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \lambda(f - a\mathrm{Id}) \text{ est un projecteur } &\Leftrightarrow (\lambda(f - a\mathrm{Id}))^2 = \lambda(f - a\mathrm{Id}) \\ &\Leftrightarrow \lambda^2(f^2 - 2af + a^2\mathrm{Id}) = \lambda(f - a\mathrm{Id}) \\ &\Leftrightarrow \lambda f^2 - (1 + 2\lambda a)f + (\lambda a^2 + a)\mathrm{Id} = 0. \end{aligned}$$

Or, $\lambda f^2 - \lambda(a+b)f + \lambda ab\mathrm{Id} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On peut donc chercher s'il existe λ vérifiant

$$1 + 2\lambda a = \lambda(a+b) \text{ et } \lambda a^2 + a = \lambda ab$$

La première équation donne $\lambda = \dfrac{1}{b-a}$, et ce λ fonctionne avec la deuxième !
Donc en $\boxed{\text{posant } \lambda = \dfrac{1}{b-a}}$, on a le résultat !
On fait de même pour $f - b\mathrm{Id}$ en posant $\mu = \dfrac{1}{a-b}$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(f - b\mathrm{Id})$.

Correction

• Déjà, $(f - a\mathrm{Id}) \circ (f - b\mathrm{Id}) = 0$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(f - b\mathrm{Id}) \subset \ker(f - a\mathrm{Id})}$: en effet, si $y \in \mathrm{Im}(f - b\mathrm{Id})$, on dispose de x tel que $y = (f - b\mathrm{Id})(x)$. Mais alors

$$(f - a\mathrm{Id}) \circ (f - b\mathrm{Id})(x) = 0_E,$$

donc $(f - b\mathrm{Id})(x) \in \ker(f - a\mathrm{Id})$, d'où l'inclusion.
• Soit maintenant x dans $\ker(f - a\mathrm{Id})$. Comme $\mu(f - b\mathrm{Id})$ est un projecteur, $\ker(\mu(f - b\mathrm{Id})) \oplus \mathrm{Im}(\mu(f - b\mathrm{Id})) = E$ donc, comme μ est non nul, $\ker(f - b\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(f - b\mathrm{Id}) = E$. On dispose donc de y et z tels que

$$x = y + z \text{ où } y \in \ker(f - b\mathrm{Id}) \text{ et } z \in \mathrm{Im}(f - b\mathrm{Id}).$$

Mais $(f - a\mathrm{Id})(x) = 0_E$ donc

$$0_E = (f - a\mathrm{Id})(y) + (f - a\mathrm{Id})(z).$$

Or, $\mathrm{Im}(f - b\mathrm{Id}) \subset \ker(f - a\mathrm{Id})$ donc $(f - a\mathrm{Id})(z) = 0$, donc

$$(f - a\mathrm{Id})(y) = 0_E \text{ i.e. } f(y) - ay = 0_E \text{ donc } (b - a)y = 0_E,$$

donc $y = 0$. Finalement $\boxed{x = z \in \mathrm{Im}(f - b\mathrm{Id})}$, d'où l'inclusion réciproque et l'égalité des ensembles.

3. Déterminer f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

 nlaillet.math@gmail.com

Correction

On sait que le polynôme $P(X) = X^2-(a+b)X+ab$ est annulateur de f. Pour déterminer f^n, effectuons la division euclidienne de X^n par P : on dispose de Q, R dans $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^n = QP + R, \text{ et } \deg(R) < \deg(P) = 2,$$

donc $R \in \mathbb{R}_1[X]$: on dispose de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $R(X) = \alpha X + \beta$. En évaluant en a (racine de P), puis en b on obtient

$$\begin{cases} a^n = \alpha a + \beta, \\ b^n = \alpha b + \beta, \end{cases}$$

donc

$$\boxed{\alpha = \frac{a^n - b^n}{a-b}} \text{ et } \beta = a^n - \alpha a = \frac{a^n(a-b) - a(a^n - b^n)}{a-b} = \boxed{\frac{ab^n - ba^n}{a-b}.}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f^n &= Q(f) \circ P(f) + R(f) \\ &= R(f) \text{ car } P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \\ &\boxed{= \frac{a^n - b^n}{a-b} f + \frac{ab^n - ba^n}{a-b} \mathrm{Id}} \end{aligned}$$

2 Trace

Exercice 8. *Mines-Ponts 24*. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des vaiid suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On considère $U = (X_1, \ldots, X_n)$ et $M = U^\top U$.

1. Déterminer la loi de $\mathrm{rg}(M)$ et celle de $\mathrm{tr}(M)$.

Correction

C'est une chose importante, on sait que toute matrice de la forme $U^\top V$ est de rang inférieur ou égal à 1. Donc $\mathrm{rg}(M) = 0$ ou 1. Or, M est de rang 0 si et seulement si $M = 0$, i.e. si et seulement si tous les coefficients de U sont nuls. Donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{rg}(M) = 0) = \mathbb{P}(U = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_n = 0) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^n,$$

par indépendance. Donc $\mathrm{rg}(M)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$.

2. Calculer la probabilité que M soit une matrice de projection.

Correction

Deuxième chose importante sur les matrices de rang 1 : elles vérifient $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$.

nlaillet.math@gmail.com

On le vérifie ici :

$$M^2 = U^\top \underbrace{UU^\top}_{\in\mathbb{R}} U = U^\top (UU^\top) U = (UU^\top) M = \left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) M.$$

Donc $M^2 = M$ si et seulement si :

(a) ou bien touts les X_i sont nuls,

(b) ou bien un seul des X_i est non nul :

$$\mathbb{P}(X_1 \neq 0, X_2 = \cdots = X_n = 0) = p(1-p)^{n-1},$$

et les événements $(\{X_i \neq 0\} \cap \{\forall j \neq i,\ X_j = 0\})_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont disjoints, donc la probabilité qu'un seul des X_i soit non nul est de $np(1-p)^{n-1}$.

D'où, au final, une probabilité de

$$(1-p)^n + np(1-p)^{n-1} = (1+(n-1)p)(1-p)^{n-1}.$$

Exercice 9. *Mines-Ponts 24*. Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ représentant un projecteur p dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On suppose P de rang r et l'on considère l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\Psi(X) = PX - XP.$$

Déterminer la trace de Ψ en fonction de n et r.

Correction

Déjà, P est un projecteur de rang r, donc on dispose de Q inversible telle que $P = QJ_rQ^{-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\Psi(X) &= QJ_rQ^{-1}X - XQJ_rQ^{-1}\\ &= QJ_rQ^{-1}XQQ^{-1} - QQ^{-1}XQJ_rQ^{-1}\\ &= Q\left(J_r(Q^{-1}XQ) - (Q^{-1}XQ)J_r\right)Q^{-1}\\ &= \alpha\circ\varphi\circ\alpha^{-1}(X),\end{aligned}$$

où $\alpha : X \mapsto QXQ^{-1}$, $\alpha^{-1} : X \mapsto Q^{-1}XQ$ et $\varphi : X \mapsto J_rX - XJ_r$.
Mais alors, on en déduit que

$$\mathrm{Tr}(\Psi) = \mathrm{Tr}(\alpha\circ\varphi\circ\alpha^{-1}) = \mathrm{Tr}(\alpha^{-1}\circ\alpha\circ\varphi) = \mathrm{Tr}(\varphi).$$

Il nous reste donc à déterminer la trace de φ. Pour ce faire, on va regarder sur la base canonique : soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

- si $i \leqslant r$ et $j \leqslant r$, $J_rE_{ij} = E_{ij}$ et $E_{ij}J_r = E_{ij}$ donc $\varphi(E_{ij}) = 0_n$,
- si $i \leqslant r$ et $j > r$, $J_rE_{ij} = E_{ij}$ mais $E_{ij}J_r = 0$ donc $\varphi(E_{ij}) = E_{ij}$ (cela apporte un coefficient 1 sur la diagonale,
- si $i > r$ et $j \leqslant r$, $J_rE_{ij} - E_{ij}J_r = -E_{i,j}$, ce qui apporte un coefficient -1 sur la diagonale,
- si $i > r$ et $j > r$, $J_rE_{ij} = E_{ij}J_r = 0_n$ donc $\varphi(E_{ij}) = 0$.

Ainsi, la diagonale de la matrice de φ dans la base canonique contient $r^2 + (n-r)^2$ zéros, $r(n-r)$ « 1 » et $r(n-r)$ « -1 », donc la trace de cette matrice est nulle ! Donc $\text{Tr}(\Psi) = 0$.*(tout ça pour ça !)*

Exercice 10. *Mines PC 23*. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à résoudre l'équation $X + \text{Tr}(X)A = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose $B = 0$. Montrer que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension et une base.

Correction

L'application $\varphi : X \mapsto X + \text{Tr}(X)A$ est clairement linéaire, donc $\ker(\varphi) = \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(X) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Ensuite, on détermine ce noyau. Soit $X \in \ker(\varphi)$. Alors $X = -\text{Tr}(X)A$ donc on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda A$. Mais alors $\lambda A = -\lambda \text{Tr}(A)A$. Donc $\lambda(1 + \text{Tr}(A))A = 0_n$.
$\boxed{\text{Si } \text{Tr}(A) = -1,}$ alors il n'y a aucune contrainte sur λ : tout multiple scalaire de A est solution de l'équation.
$\boxed{\text{Si } \text{Tr}(A) \neq -1,}$ alors $\lambda = 0$ (sauf si $A = 0$, cas que l'on élimine), donc la seule solution de l'équation est 0_n.
Donc l'espace vectoriel est ou bien $\text{Vect}(A)$ si $\text{Tr}(A) = -1$, ou bien $\{0_n\}$.

2. Résoudre l'équation dans le cas général.

Correction

On utilise le théorème de structure des solutions de l'équation $f(x) = y$ lorsque f est linéaire. L'ensemble des solutions est $\{x_0 + h, h \in \ker(f)\}$ où x_0 est une solution particulière. Cherchons donc une telle solution de $X + \text{Tr}(X)A = B$.
Déjà, on remarque que si X est une telle solution,

$$\text{Tr}(X + \text{Tr}(X)A) = \text{Tr}(B) \text{ donc } \text{Tr}(X)(1 + \text{Tr}(A)) = \text{Tr}(B).$$

D'où deux cas de figure (encore) :

- si $\text{Tr}(A) \neq -1$, alors $\text{Tr}(X) = \dfrac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}$, donc $X = B - \dfrac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}A$ alors un tel X est solution. Par la question précédente, ce X est unique. L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{B - \dfrac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}A\right\}$.
- si $\text{Tr}(A) = -1$, alors on a la condition $\text{Tr}(B) = 0$. D'où deux cas :
  - ou bien $\text{Tr}(B) \neq 0$, et alors il n'y a pas de solution à l'équation,
  - ou bien $\text{Tr}(B) = 0$ et on remarque que B est une solution particulière de l'équation donc, d'après la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation est
$$\{B + \lambda A,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 11. *Navale MP 24*. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'équivalence entre :

(i) $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(MAB) = \text{Tr}(MBA)$,

(ii) M est une homothétie (c'est-à-dire de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

Indication. Si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, que vaut $\text{Tr}(ME_{ij})$?

Correction

L'implication (ii)⇒(i) est immédiate : si on dispose de λ tel que $M = \lambda I_n$, alors si A et B sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Tr}(MAB) = \text{Tr}(\lambda I_n AB) = \lambda \text{Tr}(AB) = \lambda \text{Tr}(BA) = \text{Tr}(\lambda I_n BA) = \text{Tr}(MBA).$$

Pour l'implication réciproque, on suppose que pour toutes matrices carrées A et B, $\text{Tr}(MAB) = \text{Tr}(MBA)$.

- soit $i \neq j$. On prend $A = E_{ii}$ et $B = E_{ij}$. Alors $AB = E_{ij}$ et $BA = 0_n$. Donc $\text{Tr}(ME_{ij}) = 0$. Or, ME_{ij} est une matrice avec des zéros partout, sauf à la colonne j, qui contient la colonne i de M. Ainsi, le seul terme diagonal non nul de ME_{ij} est $[M]_{ji}$. Donc $\text{Tr}(ME_{ij}) = [M]_{ji}$. Donc si $i \neq j$, $[M]_{ji} = 0$.
- soient $i \neq j$ $A = E_{ij}$ et $B = E_{ji}$. Alors

  $$\text{Tr}(MAB) = \text{Tr}(ME_{ij}E_{ji}) = \text{Tr}(ME_{ii}) = [M]_{ii},$$

  et

  $$\text{Tr}(MBA) = \text{Tr}(ME_{ji}E_{ij}) = \text{Tr}(ME_{jj}) = [M]_{jj}$$

  Donc tous les coefficients diagonaux de M sont égaux, à, disons, λ donc $M = \lambda I_n$.

3 Déterminants (et vandermonderies)

Exercice 12. *Mines-Telecom 24*. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit $A_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A_{i,i} = 2$ et $A_{i,j} = -1$ pour $|i - j| = 1$, les autres coefficients étant nuls. On note Δ_n le déterminant de A_n. Montrer que $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$. En déduire la valeur de Δ_n.

Correction

C'est le classique parmi les classiques, le déterminant tridiagonal ! On développe sur la première ligne

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & (0) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & (0) & \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ & & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= 2\Delta_{n-1} - (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & & & & & \\ 0 & 2 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & (0) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & (0) & \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ & & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

On développe alors le deuxième déterminant selon la première colonne :

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

La suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

de racine double 1. Ainsi, on dispose de λ et μ deux réels tels que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\Delta_n = (\lambda + \mu n)1^n$. En remarquant que $\Delta_1 = 2$ et $\Delta_2 = 3$, on en déduit facilement que $\lambda = 1$ et $\mu = 1$. Ainsi, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\Delta_n = n + 1$.

Exercice 13. *Mines-Télécom 23 et 22, Mines MP 15*. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $n \in \mathbb{N}^*$ soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par : $A_{i,i} = a; A_{i,j} = b$ pour $j > i$ et $A_{i,j} = c$ pour $i > j$. Soit J la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 . Montrer que $\det(xJ + A)$ est un polynôme de degré au plus 1 . En déduire $\det(A)$.

Correction

On considère $\det(xJ + A)$ et on fait les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour i dans $[\![2, n]\!]$. On obtient alors le déterminant d'une matrice où les x sont tous sur la première ligne. En développant ensuite selon la première ligne, $\det(xJ+A)$ est bien polynomiale de degré inférieur ou égal à 1. Appelons $f(x) = \det(xJ+A)$. On cherche $f(0)$. Comme f est affine, il suffit de connaître deux valeurs prises par f : f est de la forme $f(x) = px + q$. Or,

$$f(-c) = \begin{vmatrix} a-c & & & \\ & a-c & (0) & \\ & ((b-c) & \ddots & \\ & & & a-c \end{vmatrix} = (a-c)^n.$$

De même, $f(-b) = (a-b)^n$. On en déduit, **EN SUPPOSANT** $b \neq c$,

$$\begin{aligned} p &= \frac{f(-b) - f(-c)}{-b+c} \\ &= \frac{(a-b)^n - (a-c)^n}{c-b} \\ &= \frac{(a-b-b-c)\sum_{i=0}^{n-1}(a-b)^i(a-c)^{n-1-i}}{c-b} \\ &= \boxed{\sum_{i=0}^{n-1}(a-b)^i(a-c)^{n-1-i}.} \end{aligned}$$

Ensuite,

$$q = \det(A) = f(c) + pc = (a-c)^n + c\sum_{i=0}^{n-1}(a-b)^i(a-c)^{n-1-i}.$$

Maintenant, si $c = b$, on fait tendre, dans $\det(A)$, b vers c. Mais **le déterminant est une expression polynomiale en les coefficients**, donc est **continue**. On en déduit que, si $b = c$,

$$\det(A) = (a-c)^n + cn(a-c)^{n-1} = (a+(n-1)c)(a-c)^{n-1}.$$

Exercice 14. *Mines PC 23*. Soit $(f_1, \ldots, f_p) \in (\mathcal{L}(E, \mathbb{C}))^p$. Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

1. $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille libre,

2. l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C}^p \\ x & \mapsto & (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \end{array} \right.$ est surjective,

3. $\exists (x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ tel que $\det\Big(\left(f_i\left(x_j\right)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}\Big) \neq 0$

Correction

Procédons par implications circulaires :

- si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille libre, on sait déjà que, en notant $n = \dim(E) = \dim(\mathscr{L}(E, \mathbb{C})$, on a $n \geqslant p$ (une famille libre contient moins d'éléments que la dimension de l'espace).
  Ensuite, on va déterminer la dimension de $\ker(\varphi)$. On fixe une base $\mathscr{B}$ de E, on note L_i la matrice de f_i dans cette base au départ et la base (1) de $\mathbb{C}$ à l'arrivée : c'est une matrice-ligne. La liberté de $(f_1, \ldots, f_p)$ assure que $L_1, \ldots, L_p$ forme une famille libre de p éléments de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Mais la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ au départ et la base canonique de $\mathbb{C}^p$ à l'arrivée est la matrice $M = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} in\mathscr{M}_{p,n}$. Comme $p \leqslant n$ et que $(L_1, \ldots, L_p)$ est libre, le rang de M est égal à p. Donc le rang de φ est égal à p, donc, comme $\dim(\mathbb{C}^p) = p$, φ est surjective.

- si φ est surjective, on prend $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$, et on pose x_i un antécédent de e_i par φ. Alors si $A = (f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$, par définition, $A = \mathrm{I}_p$, de déterminant non nul.
- supposons que l'on dispose de $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ tel que $\det\Big((f_i\,(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}\Big) \neq 0$. Montrons que $(f_1, \dots, f_p)$ est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{C})}$. Alors pour tout j, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x_j) = 0_{\mathbb{C}}$, ce qui signifie que
$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$
où A est la matrice $(f_j(x_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ (attention aux indices i et j !) Mais A est de déterminant non nul, donc est inversible, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Exercice 15. *Mines-Ponts 24*. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A_{i,j} = P(x + i + j - 2)$. Montrer que A n'est pas inversible.

Correction

On note, pour i dans $[\![1, n]\!]$,
$$Q_i(X) = P(x + i + X - 2).$$
Alors la famille $(Q_1, \dots, Q_n)$ est une famille de n vecteurs dans un espace de dimension $n - 1$, donc elle est liée. Cette famille est liée : il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vérifiant
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$
Mais alors, pour tout j, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(j) = 0_{\mathbb{R}}$, ce qui assure que, si $L_1, \dots, L_n$ sont les lignes de A, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0_{1,n}$. Ainsi, les lignes de A sont liées donc A n'est pas inversible.

Exercice 16. *CCINP 24*. Soit $(A, B, P) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $AP = PB$. On écrit $P = P_1 + \mathrm{i}P_2$ avec $(P_1, P_2) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'on pose : $Q(x) = \det(P_1 + xP_2)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $A(P_1 + xP_2) = (P_1 + xP_2)\,B$.

Correction

On sait que $AP = PB$ donc $AP_1 + iAP_2 = P_1B + iP_2B$. Les matrices AP_1, AP_2, P_1B, P_2B sont à coefficients réels, donc en égalisant les parties réelle et imaginaire des deux membres de l'égalité, on obtient le résultat.

2. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $Q(x_0) \neq 0$.

Correction

Par la formule de développement sur une ligne, appliquée n fois, on sait que Q est une fonction polynomiale de x. Or, comme $Q(i) \neq 0$ (car $P_1 + iP_2$ est inversible), on sait que Q n'est pas le polynôme nul. Donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x_0) \neq 0$ (sinon Q s'annulerait sur tout $\mathbb{R}$, donc une infinité de fois, donc Q serait le polynôme nul).

3. En déduire qu'il existe $P_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que : $AP_0 = P_0B$. Qu'a-t-on démontré ?

Correction

En posant $P_0 = P_1 + x_0P_2$, on obtient le résultat. On a démontré que si deux matrices étaient semblables sur $\mathbb{C}$, alors elles étaient semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. *CCINP 24.* **1.** Rappeler la forme d'une matrice de Vandermonde et l'expression de son déterminant.

Correction

C'est du cours !

2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ on pose $f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{kx}$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Correction

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$.

Première méthode : avec le déterminant de Vandermonde. On dérive l'égalité précédente p fois et on évalue en 0 : cela donne $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i i^p = 0$. On obtient donc le système, en dérivant de 0 à $n-1$ fois

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + 2^2\lambda_2 + \dots + n^2\lambda_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 + 2^{n-1}\lambda_2 + \dots + n^{n-1}\lambda_n = 0, \end{cases} \quad \text{soit } V \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

où V est la matrice de Vandermonde associée à $(1, \dots, n)$: elle est inversible car $(1, \dots, n)$ sont deux à deux distincts.

Deuxième méthode : avec des limites. Supposons que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$. Soit p le plus grand indice tel que $\lambda_p \neq 0$. Alors $0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda_p \mathrm{e}^{px}$, ce qui est absurde, $\lambda_p \mathrm{e}^{px} \underset{x\to+\infty}{\not\sim} 0$, donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$.

Remarque : cette deuxième méthode ne fonctionne pas si on regardait des $\exp(\alpha_i x)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

3. (a) Sans les calculer, montrer que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ admet trois racines distinctes dans $\mathbb{C}$, que l'on notera α, β et γ.

Correction

Déjà, si on pose $f : x \mapsto x^3 + x + 1$, $f' : x \mapsto x^2 + 1$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f croît strictement. f est de plus continue et $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ donc, par le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Ensuite, P est de degré 3 donc admet trois racines complexes (comptées avec multiplicité). Comme il n'admet qu'une racine réelle, il admet aussi deux autres racines β et γ, complexes non réelles, conjuguées (et donc différentes).

(b) Résoudre le système $\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z & = 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z & = 0 \end{cases}$

Correction

Il s'agit d'un système de Vandermonde, qui n'a comme solution que $(0, 0, 0)$.

Exercice 18. *Mines-Ponts 2015*. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$.
Indication : Montrer que $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + \mathrm{i}B)\det(A - \mathrm{i}B)$.

Correction

Explication de la démarche. ATTENTION ! On ne peut pas écrire que $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A^2 + B^2)$, et en plus, cette quantité n'est pas positive... Non, il faudra certainement utiliser le déterminant par blocs, mais le détemrinant **triangulaire par blocs.** Je ne veux pas sortir de solution du chapeau (d'autant plus qu'au moment où je rédige ce corrigé, je n'ai plus l'« astuce »). On va essayer d'écrire $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ comme un produit de deux matrices triangulaires par blocs, la première de déterminant $A + iB$, la seconde de déterminant $A - iB$. On peut d'abord essayer

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + iB & 0 \\ C & A - iB \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & D \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

Mais on se rend compte que ça ne marche pas. Ensuite, on peut se dire que l'on va essayer d'écrire $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ comme un produit de matrices **non triangulaires par blocs, mais faites de**

sorte que lorsqu'on calcule leur déterminant, on se ramène à des matrices triangulaires par blocs. Par exemple, si je prends la matrice $\begin{pmatrix} A & -iB \\ \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$, alors le déterminant de cette matrice est, en faisant des opérations sur les colonnes, $\begin{vmatrix} A+iB & -iB \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{vmatrix}$.
Bon, à ce moment-là, je patine sur l'exercice, je n'arrive pas à trouver de produit astucieux...
Du coup je change de point de vue : j'ai parlé d'opérations élémentaires... Est-ce que je peux faire des opérations élémentaires qui transforment aisément mon déterminant ?

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & -B \\ B+iA & A-iB \end{vmatrix} \text{ en faisant } L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + iL_1,\ L_{n+2} \leftarrow L_{n+2} + iL_2, \dots \\
&= \begin{vmatrix} A+iB & -B \\ 0_n & A-iB \end{vmatrix} \text{ en faisant } C_1 \leftarrow C_1 - iC_{n+1},\ C_2 \leftarrow C_2 - iC_{n+2}, \dots \\
&= \det(A+iB)\det(A-iB) \\
&= \det(A+iB)\overline{\det(A-iB)} \\
&= |\det(A+iB)|^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

D'où le résultat !

Exercice 19. *Variations autour du Vandermonde*.

1. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels et $(P_0, \dots, P_{n-1})$ une famille de polynômes telle que $\deg(P_i) = i$. Calculer le déterminant $\det\left(P_{j-1}(x_i)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ en fonction du déterminant de Vandermonde $V(x_1, \dots, x_n)$.

Correction

On note $c_k^{(i)}$ le coefficient de X^k de P_i. Le déterminant recherché est

$$D = \begin{vmatrix} c_0^{(0)} & c_1^{(1)}x_1 + c_0^{(1)} & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-2} + \cdots + c_0^{(n-1)} \\ c_0^{(0)} & c_1^{(1)}x_2 + c_0^{(1)} & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-2} + \cdots + c_0^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_0^{(0)} & c_1^{(1)}x_n + c_0^{(1)} & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-2} + \cdots + c_0^{(n-1)} \end{vmatrix} = c_0^{(0)} \begin{vmatrix} 1 & c_1^{(1)}x_1 + c_0^{(1)} & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-} \\ 1 & c_1^{(1)}x_2 + c_0^{(1)} & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-} \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & c_1^{(1)}x_n + c_0^{(1)} & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-} \end{vmatrix}$$

On fait alors les opérations $C_i \leftrightarrow C_i - c_0^{(i)}C_1$, pour supprimer tous les coefficients constants, on obtient alors

$$\begin{aligned}
D &= c_0^{(0)} \begin{vmatrix} 1 & c_1^{(1)}x_1 & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-2} + \cdots + c_1^{(n-1)}x_1 \\ 1 & c_1^{(1)}x_2 & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-2} + \cdots + c_1^{(n-1)}x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_1^{(1)}x_n & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-2} + \cdots + c_1^{(n-1)}x_n \end{vmatrix} \\
&= c_0^{(0)}c_1^{(1)} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-2} + \cdots + c_1^{(n-1)}x_1 \\ 1 & x_2 & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-2} + \cdots + c_1^{(n-1)}x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-2} + \cdots + c_1^{(n-1)}x_n \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

En poursuivant ainsi, on obtient

$$\boxed{D = \left(\prod_{i=0}^{n-1} c_i^{(i)}\right) V(x_0, \ldots, x_{n-1}).}$$

2. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos((n-1)\theta_1) \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos((n-1)\theta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos((n-1)\theta_n) \end{vmatrix}$.

Correction

On pose $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ (la suite des polynômes de Tchebycheff). Alors pour tout n, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, et le coefficient dominant de T_i est, pour $i \geqslant 1$, 2^i. Donc le déterminant recherché est

$$\prod_{i=1}^{n-1} 2^i V(\cos(\theta_1), \ldots, \cos(\theta_n)).$$