TD 03
Révisions d'algèbre linéaire – 3 exercices de révision de sup

Exercice 1. *Calcul explicite de projecteur*. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \text{ et } G = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

2. Déterminer les projecteurs associés à cette somme directe.

3. Déterminer la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 2. Soit $f_\alpha : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & (1+X)P' - \alpha P \end{array}\right.$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2. Montrer que $\mathscr{B} = (1, 1+X, (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Déterminer la matrice A_α de f_α dans la base précédente.

4. À quelle condition sur α l'endomorphisme f_α est-il inversible ?

Exercice 3. *Couple de symétries qui anticommutent*. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$. On note $A_f = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $B_f = \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $A_g = \ker(g - \mathrm{Id}_E)$, $B_g = \ker(g + \mathrm{Id}_E)$.

1. Démontrer que $g(A_f) = B_f$ et $g(B_f) = A_f$.

2. En déduire que la dimension de E est paire.

3. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{E}$ de E t.q. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix}\mathrm{I}_n & 0\\ 0 & -\mathrm{I}_n\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g) = \begin{pmatrix}0 & \mathrm{I}_n\\ \mathrm{I}_n & 0\end{pmatrix}$.
Indication : partir d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de A_f. Que dire que $(g(e_1), \dots, g(e_n))$?