CORRECTION TD3

Exercice 5 :

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A^{n-1} \neq O_n$, $\exists X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A^{n-1}X_0 \neq O_n$

Montrons la liberté de $(X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0)$

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$(*)\ \lambda_1 X_0 + \lambda_2 AX_0, \dots + \lambda_n A^{n-1} X_0 = O_n$

donc $\lambda_1 A^{n-1} X_0 + \lambda_2 AX_0 + \dots + \lambda_n A^{2n-2} X_0 = 0$

donc $\lambda_1 \underbrace{A^{n-1} X_0}_{\neq O_n} = O_n = 0$

alors $\lambda_1 = 0$

On démontre par récurrence forte sur k, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathcal{H}(k)$: " $\lambda_k = 0$ "

Initialisation : on a démontré $\mathcal{H}_0$

Hérédité : Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{H}_k, \mathcal{H}_{k-1}, \dots \mathcal{H}_1$ vraies

Montrons $\mathcal{H}_{k+1}$: On sait que $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

Remarque : Pour le DM 3, il faut une belle récurrence ou un bel absurde !

$(*)$ s'écrit $\lambda_{k+1} A^k X_0 + \dots + \lambda_n A^{n-1} X_0 = 0$

$(*) \times A^{n-k-1}$: $\lambda_{k+1} A^{n-1} X_0 + \underbrace{\dots + \lambda_n A^{2n-k-2} X_0}_{O_{n,1}} = 0$

Donc $\lambda_{k+1} \underbrace{A^{n-1} X_0}_{\neq O_{n,1}} = 0$

alors $\lambda_{k+1} = 0$

$\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{H}_k$ est initialisée et héréditaire,
donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathcal{H}_k$.
Donc $\lambda_k = 0$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$

Donc liberté.

* On aurait pu raisonner par l'absurde en supposant $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ et en prenant $k = \min \{ i \in [\![1,n]\!] / \lambda_i \neq 0 \}$

2) Posons φ l'application linéaire canoniquement associée à A $\rightarrow$ $\varphi(X) = AX$

$$J_n = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(X_0) & \varphi(AX_0) \cdots & \varphi(A^{n-2}X_0) & \varphi(A^{n-1}X_0) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} X_0 \\ AX_0 \\ \vdots \\ A^{n-1}X_0 \end{array}$$

$\rightarrow$ $\mathcal{B} = (X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0)$ est libre qui possède n éléments donc c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

Donc A est semblable à J_n (représentation du même endomorphisme).

3) $$e^{J_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{J_n^k}{k!}$$

On remarque que :

$$J_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & \ddots & (0) & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 \; 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2

$$J_n^3 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & (0) & \\ 0 & & \ddots & & & \\ 1 & \ddots & & \ddots & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$e^{J_n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & \ddots & & (0) & \\ 1/2 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{J_n^0}{0!}$

Donc $e^{J_n} - I_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & (0) & \\ 1/2 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $e^{J_n} - I_n$ est nilpotente d'indice n.

(Matrice triangulaire stricte $\Rightarrow$ nilpotente)

Autre manière :

$$\lambda(e^{J_n} - I_n) = \lambda \sum_{k=1}^{n-1} \frac{J_n^k}{k!} = J_n \times \underbrace{\left(\lambda \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{J_n^{k-1}}{k!} \right)}_{\begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & \lambda \end{pmatrix}}$$

Donc $B = \lambda(e^{J_n} - I_n) = J_n \times A$

où $A \in Gl_n(\mathbb{K})$ et $A J_n = J_n A$

A est un polynôme en J_n

Alors $B^k = J_n^k A^k$

Donc $B^n = J_n^n A^n = 0_n$

et $B^{n-1} = J_n^{n-1} A^{n-1} \neq 0_n$ car $J_n^{n-1} \neq 0_n$

et $A^{n-1} \in Gl_n(\mathbb{K})$

Donc $\lambda(e^{J_n} - I_n)$ est nilpotente d'indice n.

4) $\lambda(e^{J_n} - I_n)$ est nilpotente d'indice n, donc, par 2), elle est semblable à J_n.
on dispose de $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tq $\lambda(e^{J_n} - I_n) = P J_n P^{-1}$
donc $J_n = P^{-1} \lambda (e^{J_n} - I_n) P$
$$= \lambda P^{-1} e^{J_n} P - \lambda I_n$$

D'où le résultat.

5) $$P^{-1} e^{J_n} P = P^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{J_n^k}{k!} \right) P$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{-1} J_n^k P}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(P^{-1} J_n P)^k}{k!}$$
$$= e^A \quad \text{où } A = P^{-1} J_n P$$

Donc $\lambda I_n + J_n = \lambda e^A$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$
$= e^{\alpha} e^A$, $\alpha \in \mathbb{C}$
arnaque temporaire $\leftarrow$ $= e^{\alpha I_n + A}$

Qui est α ? $\lambda = \rho e^{i\theta} = e^{\alpha}$ où $\alpha = \ln(\rho) + i\theta$

Retour sur la liberté :

Par l'absurde, si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$
On pose $k = \min \{ i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \neq 0 \}$.
Alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k-1} = 0$
Donc, comme $\lambda_1 x_0 + \dots + \lambda_n A^{n-1} x_0 = 0_{n,1}$
On en déduit, $\lambda_k A^{k-1} x_0 + \dots + \lambda_n A^{n-1} x_0 = 0_{n,1}$
on multiplie par A^{n-k} :
$$\lambda_k A^{n-1} x_0 + \underbrace{\lambda_{k+1} A^n x_0 + \dots + \lambda_n A^{2n-k-1} x_0}_{= 0_{n,1}} = 0_{n,1}$$

donc $\lambda_k A^{n-1} X_0 = 0_{n,1}$

$A^{n-1} X_0 \neq 0_{n,1}$ donc $\lambda_k = 0$, absurde !

Donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$