TD 03
Révisions d'algèbre linéaire – 3 exercices de révision de sup

Exercice 1. *Calcul explicite de projecteur*. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{et } G = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Correction

La version la plus courte est la suivante : G est un hyperplan (noyau de la forme linéaire $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto x+y+z$) et $(1,0,0) \notin G$, donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

2. Déterminer les projecteurs associés à cette somme directe.

Correction

Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Par la question précédente, on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ et de $(a,b,c) \in G$ tels que

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Alors $z=c$, $b=y$ et, comme $a=-b-c=-z-y$, on en déduit que $\lambda = x+y+z$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (x+y+z)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix}$$

Donc, si p est la projection sur F parallèlement à G et q est la projection sur G parallèlement à F, alors pour tout $u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$$p(u) = (x+y+z)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{et } q(u) = \begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix}.$$

3. Déterminer la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Correction

Pour tout $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$$s(u) = (x+y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $f_\alpha : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & (1+X)P' - \alpha P \end{array} \right.$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

Correction

. Déjà, f_α est linéaire. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, λ et μ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f_\alpha(\lambda P + \mu Q) &= (1+X)(\lambda P + \mu Q)' - \alpha(\lambda P + \mu Q) \\ &= (1+X)(\lambda P' + \mu Q') - \alpha(\lambda P + \mu Q) \\ &= (1+X)\lambda P' + (1+X)\mu Q' - \alpha\lambda P - \alpha\mu Q \\ &= \lambda((1+X)P' - \alpha P) + \mu((1+X)Q' - \alpha Q) \\ &= \lambda f_\alpha(P) + \mu f_\alpha(Q), \end{aligned}$$

d'où la linéarité.
. Ensuite, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg((1+X)P') \leqslant 1+n-1 = n$, donc $\deg((1+X)P' - \alpha P) \leqslant n$.
Donc f_α est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que $\mathscr{B} = (1, 1+X, (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction

La famille $(1, 1+X, (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$ est une famille de $n+1$ polynômes non nuls à degrés échelonnés, donc est libre. De cardinal n dans un espace de dimension n, elle est donc une base de cet espace.

3. Déterminer la matrice A_α de f_α dans la base précédente.

Correction

Soit k dans $[\![0, n]\!]$. Alors

$$f_\alpha((1+X)^k) = (1+X)k(1+X)^{k-1} - \alpha(1+X)^k = (k-\alpha)(1+X)^k,$$

d'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_\alpha)$ est la matrice diagonale de diagonale $(-\alpha, 1-\alpha, 2-\alpha, \dots, n-\alpha)$.

4. À quelle condition sur α l'endomorphisme f_α est-il inversible ?

Correction

f_α est inversible si et seulement si A_α est inversible. Une matrice diagonale étant inversible ssi ses termes diagonaux sont tous non nuls, A_α est inversible si et seulement si $\alpha \notin [\![0, n]\!]$.

Exercice 3. *Couple de symétries qui anticommutent*. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$. On note $A_f = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $B_f = \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $A_g = \ker(g - \mathrm{Id}_E)$, $B_g = \ker(g + \mathrm{Id}_E)$.

1. Démontrer que $g(A_f) = B_f$ et $g(B_f) = A_f$.

Correction

Montrons la première égalité par double inclusion.
Soit $y \in g(A_f)$. Alors on dispose de $x \in A_f$ tel que $y = g(x)$. Alors

$$f(y) = f(g(x)) = -g(f(x)) = -g(x) = -y,$$

donc $y \in B_f$. Donc $g(A_f) \subset B_f$.
Soit $y \in B_f$. Alors $y = g(g(y))$. En posant $x = g(y)$, on remarque que

$$f(x) = f(g(y)) = -g(f(y)) = -g(-y) = g(y) = x,$$

donc $x \in A_f$. D'où l'inclusion réciproque et l'égalité.
On démontre de même que $g(B_f) = A_f$.

2. En déduire que la dimension de E est paire.

Correction

g étant un isomorphisme, il préserve la dimension. Or, $g(A_f) = B_f$ donc $\dim(A_f) = \dim(B_f)$. Mais comme $A_f \oplus B_f = E$, on en déduit que $\dim(E) = 2\dim(A_f)$. D'où le résultat.

3. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{E}$ de E t.q. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$.
Indication : partir d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de A_f. Que dire que $(g(e_1), \dots, g(e_n))$?

Correction

Notons $\dim(E) = 2n$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de A_f. Alors $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une base de B_f. Donc $(e_1, \dots, e_n, g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une base de E. Dans cette base, les matrices de f et g sont exactement comme souhaité !