TD Algèbre linéaire — 24/09

exercice 6 :

u est nilpotent donc on dispose de $p \in \mathbb{N}$ tq $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$
et $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. On peut mq si x vérifie $u^{p-1}(x) \neq 0$
alors $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. Donc $p \leq n$, où $n = \dim(E)$
Montrons par récurrence que :
pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, " $E = F + \mathrm{Im}(u^k)$ " (H_k)

<u>initialisation</u> $k = 1$
$E = F + \mathrm{Im}(u)$ par hypothèse

<u>hérédité</u> : Fixons $k \in \mathbb{N}^*$ tq $H(k)$ est vérifiée. Montrons $H(k+1)$
Soit $x \in E$.
Par $H(k)$, on dispose de $(y, z) \in F \times E$ tq $x = y + u^k(z)$
Or $z \in E$, donc on dispose de $(\alpha, \beta) \in F \times E$ tq $z = \alpha + u(\beta)$
par hypothèse sur u.
Donc $x = y + u^k(\alpha + u(\beta))$
$x = y + u^k(\alpha) + u^{k+1}(\beta)$
Par linéarité de u.
$u^k(\alpha) \in F$ par stabilité de F par u.
Donc $y + u^k(\alpha) \in F$ et $u^{k+1}(\beta) \in \mathrm{Im}(u^{k+1})$
$x \in F + \mathrm{Im}(u^{k+1})$

<u>Conclusion</u> : on a montré $H(k)$ par principe de récurrence

En particulier, $H(p)$ est vraie. Or $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$
Donc $\mathrm{Im}(u^p) = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$
Donc $E = F$

exercice 4 :

Posons, pour $k \in \mathbb{N}$, $r_k = rg(f^k)$

1. Mq $r_{k+1} \leq r_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Mq $Im(f^{k+1}) \subset Im(f^k)$

Soit $y \in Im(f^{k+1})$

On dispose de $x \in E$ tq $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) \in Im(f^k)$

Donc (r_k) est décroissante

(r_k) est une suite décroissante minorée par 0 Donc par le thm de la limite monotone, elle cv vers $\underline{l \in \mathbb{R}}$ $\downarrow$ $\mathbb{N}$

Mq (r_k) est stationnaire

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |r_n - l| \leq \varepsilon$

On prend $\varepsilon = 1/4$

On dispose de $N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|r_n - l| \leq \frac{1}{4}$

Donc $\forall n \geq N$ $|r_n - r_N| = |r_n - l + l - r_N|$

$\leq |r_n - l| + |r_N - l|$

$\leq \frac{1}{2}$

Donc $\forall n \geq N$, $r_n = r_N$ car (r_n) est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc (r_n) est stationnaire.

<u>Autre méthode</u> : on démontre que si $r_k = r_{k+1}$ alors $r_{k+1} = r_{k+2}$

Supposons $r_k = r_{k+1}$, alors $Im(f^k) = Im(f^{k+1})$ par inclusion et égalité des dimensions.

Mq $Im(f^{k+1}) = Im(f^{k+2})$

On a déjà que $Im(f^{k+2}) \subset Im(f^{k+1})$

Soit $y \in Im(f^{k+1})$. Donc on dispose de $x \in E$ tq

$y = f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$

Or $f^k(x) \in Im(f^k) = Im(f^{k+1})$

Donc $y \in Im(f^{k+2})$. Donc $Im(f^{k+1}) = Im(f^{k+2})$

Donc $r_{k+1} = r_{k+2}$. La suite (r_k) est strictement décroissante jusqu'à être stationnaire. Minorée par 0, elle est donc stationnaire.

2. Soit $g_k \left| \begin{array}{l} f^k(E) \to f^{k+1}(E) \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$

Par le thm du rang, $rg(g_k) + \dim(\ker(g_k)) = \underbrace{\dim(f^k(E))}_{= r_k}$

On a $Im(g_k)$ qui est $\{f(x),\ x \in f^k(E)\} = f^{k+1}(E)$

Donc $rg(g_k) = r_{k+1}$

Ainsi, $r_k - r_{k+1} = \dim(\ker(g_k))$.

Or, $\ker(g_k) = \{x \in f^k(E),\ g(x) = 0\}$

$= \{x \in f^k(E),\ f(x) = 0\}$

$= f^k(E) \cap \ker(f)$

Or $f^{k+1}(E) \subset f^k(E)$ par la question 1

Donc $\ker(g_{k+1}) = f^{k+1}(E) \cap \ker(f)$

$\subset f^k(E) \cap \ker(f)$

Donc $\dim(\ker(g_{k+1})) \leq \dim(\ker(g_k))$

Donc $r_{k+1} - r_{k+2} \leq r_k - r_{k+1}$

Alors, $(r_k - r_{k+1})$ est décroissante.

Remarque : de même, on peut mq $\ker(f) \subset \ker(f^2) \subset \ldots$ et la suite des noyaux est strict. croissante jusqu'à être stationnaire.

Si f est nilpotent et p son indice de nilpotence,

$$0 = \dim(\ker(f^0)) < \dim(\ker(f)) < \ldots < \dim(\ker(f^{p-1})) < \underbrace{\dim(\ker f^p)}_{= \dim(E)}$$

$+1$ $\quad$ $+1$

Donc $p \leq n$