PSI – Programme de colles
Semaine 02 – du 30 septembre au 4 octobre 2024

Programme en bref

— séries numériques : révisions de la semaine précédente.

— révisions et prolongements d'algèbre linéaire : le cœur de la colle. Révisions (espaces vectoriels, applications linéaires, matrices, déterminants) + prolongements (sous-espaces stables, somme directe de n espaces, polynômes d'endomorphismes, trace).

— **PAS** d'interpolation de Lagrange ou de Vandermonde.

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. Une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre.
2. Théorème de structure des solutions de $f(x) = y$.
3. Si $p \circ p = p$, alors $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - Id) = E$.
4. SI $s \circ s = Id$, alors $\mathrm{Ker}(s - Id) \oplus \mathrm{Ker}(s - Id) = E$.
5. Matrices de la base canonique, définition et produit de deux matrices de la base canonique.
6. Si φ est application linéaire de rang r, il existe $\mathscr{E}$ base de E et $\mathscr{F}$ base de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(\varphi) = J_r$.
7. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ (lorsque A et B sont **rectangulaires** de formats compatibles)
8. L'application linéaire $P \mapsto (P(a_0), \ldots, P(a_n))$ est un isomorphisme.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Compléments sur les séries numériques

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Compléments sur les séries numériques	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone.
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	La démonstration n'est pas exigible.
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	La démonstration n'est pas exigible.

Révisions d'algèbre linéaire

- sous-espaces vectoriels, familles libres/génératrices/bases, cas de la dimension finie.
- applications linéaires, noyau, image, théorème de structure, théorème du rang, projecteurs, symétries, formes linéaires.
- matrices, règles de calcul, application linéaire associée à une matrice, représentation matricielle d'applications linéaires.

Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.	
En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$.	Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	
b) Matrices par blocs et sous-espaces stables	
Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.	Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v.	
c) Trace	
Trace d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{Tr}(A)$.
Linéarité, trace d'une transposée.	
Relation $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.	
Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	
d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées	
Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.	Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
Polynôme annulateur.	Application au calcul de l'inverse et des puissances.
Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent.	Le noyau de $P(u)$ est stable par u.
Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.	