TD 18
Espaces vectoriels

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $E = \{(\alpha, 0, 2\alpha+\beta);\quad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$.
2. $F = \{(a, y, x) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=-1\}$.
3. $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2\}$.
4. L'ensemble des fonctions croissantes.
5. L'ensemble des polynômes de degré n.
6. L'ensemble des polynômes dont 1 est racine double.
7. $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\right\}$.
8. $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid u_{n\to+\infty}{=}_o \left(\frac{1}{n}\right)\right\}$

Exercice 2.
1. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est-elle combinaison linéaire de $(x \mapsto x^k)_{k\in\mathbb{N}}$?
2. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?
3. La famille $(t \mapsto t^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est-elle libre dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$?
4. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}((X-1)^2, X^2-1, (X+1)^2)$.

Correction

Plusieurs possibilités, mais je vais utiliser la propriété de cours disant que si l'on fait une combinaison linéaire dans un vect, on ne change pas le vect ! On écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}((X-1)^2, X^2-1, (X+1)^2) &= \mathrm{Vect}(X^2-2X+1, X^2-1, X^2+2X+1)\\
&= \mathrm{Vect}(X^2-2X+1+X^2+2X+1, X^2-1, X^2+2X+1)\\
&= \mathrm{Vect}(2X^2+2, X^2-1, X^2+2X+1)\\
&= \mathrm{Vect}(X^2+1, X^2-1, X^2+2X+1)\\
&= \mathrm{Vect}(X^2+1, X^2-1-(X^2+1), X^2+2X+1-(X^2+1))\\
&= \mathrm{Vect}(X^2+1, -1, 2X)\\
&= \mathrm{Vect}(X^2, -1, 2X)\\
&= \mathrm{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]
\end{aligned}$$

5. Donner, dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, un supplémentaire de $F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) = 0\}$, puis un supplémentaire de $G = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$.

Exercice 3. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, differente de 0_n. Soit φ l'application qui à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associe $\mathrm{Tr}(M)A$.
1. Démontrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$.
2. Déterminer $\ker(\varphi)$. φ est-elle injective ?
3. φ est-elle sujective ?

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, le *sous-espace propre* associé à λ est l'ensemble noté $E_\lambda(u) = \{x \in E,\ u(x) = \lambda x\}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Démontrer que $E_\lambda(u) = \ker(\varphi_\lambda)$, avec φ_λ un endomorphisme à préciser.

2. Soient λ et μ dans $\mathbb{K}$ tels que $\lambda \neq \mu$. Démontrer que $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont en somme directe.

3. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

4. Soit $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$, non nuls, $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ deux à deux distincts, tels que pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, $u(x_i) = \lambda_i x_i$. On va démontrer que la famille $(x_1, \dots, x_r)$ est libre dans E.

(a) **Première preuve.** Démontrer le résultat par récurrence sur r.

(b) **Deuxième preuve.** r est fixé. Soit $(\mu_1, \dots, \mu_r)$ dans $\mathbb{K}^r$ tels que $\mu_1 x_1 + \dots + \mu_r x_r = 0$.

- Démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\mu_1 \lambda_1^k x_1 + \dots + \mu_r \lambda_r^k x_r = 0$.
- Démontrer que pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$, $\mu_1 P(\lambda_1) x_1 + \dots + \mu_r P(\lambda_r) x_r = 0$.
- En utilisant l'interpolation de Lagrange, conclure.

5. **Application.** Soit u défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = XP'$.

(a) Démontrer que u est un endomorphisme.

(b) Déterminer, pour k dans $[\![0, n]\!]$, $E_k(u)$.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-ev, p et q deux projecteurs de E. Soit $r = p + q$.

1. Montrer que r est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Correction

Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$. Alors

$$\begin{aligned}(p+q)\circ(p+q) &= p\circ p + p\circ q + q\circ p + q\circ q \\ &= p\circ p + q\circ q \text{ par hypothèse.} \\ &= p + q \text{ car } p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs.}\end{aligned}$$

Suppsons maintenant que $p+q$ est un projecteur. On a alors $(p+q)\circ(p+q) = p+q$. Donc $p\circ p + p\circ q + q\circ p + q\circ q = p+q$, donc

$$p\circ q + q\circ p = 0.$$

En composant à gauche par p, on obtient $p\circ q + p\circ q\circ p = 0$. En composant à droite par p, on obtient $p\circ q\circ p + q\circ p = 0$, donc $p\circ q = q\circ p$, donc $2p\circ q = 0$ donc $p\circ q = q\circ p = 0$.

2. On suppose que r est un projecteur. Déterminer $\ker(r)$ et $\operatorname{Im}(r)$.

Correction

En adaptant la question précédente, montrons que $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)$ et $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$. On a, comme r est un projecteur, $p\circ q = q\circ p = 0$.

- Image.
  Soit $y \in \operatorname{Im}(p+q)$. Alors on dispose de x dans E tel que $y = (p+q)(x) = p(x) + q(x)$. Or $p(x) \in \operatorname{Im}(p)$ et $q(x) \in \operatorname{Im}(q)$ donc $y \in \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Alors on dispose de $f \in \mathrm{Im}(p)$ et $g \in \mathrm{Im}(q)$ tels que $y = f + g$. Calculons alors

$$(p+q)(y) = p(f) + q(f) + p(g) + q(g).$$

Or, $f \in \mathrm{Im}(p)$ donc $p(f) = f$. Donc $q(f) = q(p(f)) = 0$. De même $p(g) = 0$ et $q(g) = g$. Donc $(p+q)(y) = f + g = y$ donc $y \in \mathrm{Im}(p+q)$.

- Noyau.
  Soit $x \in \ker(p+q)$. Alors $(p+q)(x) = 0$. Donc $p(x) = -q(x)$. Donc en composant par p à gauche, $p \circ p(x) = -p \circ q(x)$. Or $p \circ p = p$ et $p \circ q = 0$, donc $p(x) = 0$, donc $x \in \ker(p)$. De même $q(x) = 0$, i.e. $x \in \ker(q)$.
  Soit $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$. Alors $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0 + 0 = 0$. Donc $x \in \ker(p+q)$.

2 Espaces vectoriels

2.1 Définition

Exercice 6. ◐○○

Parmi tous ces ensembles, lesquels sont des espaces vectoriels ?

1. $E = \{(\alpha, 0, 2\alpha + \beta);\ \ \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$.
2. $F = \{(\alpha + 1, \alpha, -\alpha);\ \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.
3. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y + 2z = 0\}$.
4. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 1\}$.
5. $J = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z \geqslant 0\}$.
6. $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 2z\}$.
7. $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \leqslant 1\}$.
8. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x-1)^2 + y^2 = 1\}$.
9. $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2\}$.

Correction

(i) E est un espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 0, 2)$ et $v = (0, 0, 1)$.

(ii) F n'est pas un espace vectoriel car $(0, 0, 0) \notin F$.

(iii) G est un espace vectoriel (c'est un plan de $\mathbb{R}^3$).

(iv) H n'est pas un espace vectoriel : $0 \notin H$.

(v) J n'est pas un espace vectoriel : même si $0 \in J$, on remarque par exemple que $(1, 1, 1) \in J$ mais $-1(1, 1, 1) = (-1, -1, -1) \notin J$.

(vi) K est un espace vectoriel (c est une droite de $\mathbb{R}3$)

(vii) L n'est pas un espace vectoriel : $(-1, -1) \in L$ mais pas $(-1).(-1, -1)$.

(viii) M n'est pas un espace vectoriel : c'est le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.

(ix) N n'est pas un espace vectoriel : c'est la réunion de deux droites (on peut par exemple dire que $(1, 1) \in N$, $(-1, 1) \in N$ mais $(1, 1) + (-1, 1) = (0, 2) \notin N$.

Exercice 7. ●◐○

Parmi tous ces ensembles, lesquels sont des espaces vectoriels ?

(i) L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissantes.

Correction

Non, car $x \mapsto x$ est dans cet ensemble mais pas $x \mapsto -x$.

(ii) $\{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = 1\}$.

Correction

Non, car 0 n'appartient pas à cet ensemble.

(iii) L'ensemble des suites réelles convergentes.

Correction

Oui ! Montrons-le, en montrant que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles. Notons E cet ensemble.

- E est bien inclus dans l'ensemble des suites réelles.
- E n'est pas vide car la suite nulle est convergente.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de E, λ et μ deux réels. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. Donc $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(iv) L'ensemble des suites monotones.

Correction

Non ! Car si l'on prend $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-2n)_{n\in\mathbb{N}}$, les deux sont monotones mais $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n(n-2))_{n\in\mathbb{N}}$, et donc $w_0 = 0$, $w_1 = -1$ et $w_2 = 0$, donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

(v) L'ensemble des suites qui s'écrivent comme la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante.

Correction

Oui ! Montrons-le, en montrant que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles. Notons F cet ensemble.

- F est bien inclus dans l'ensemble des suites réelles.
- F n'est pas vide car la suite nulle est somme de la suite nulle, qui est croissante, et de la suite nulle, qui est décroissante.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de F, λ et μ deux réels. On écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} + (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissantes, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissantes. Alors

— Si λ et μ sont strictement positives, alors $(\lambda a_n + \mu c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(\lambda b_n + \mu d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F.

— Si λ et μ sont négatives, alors $(\lambda a_n+\mu c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(\lambda b_n+\mu d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F.

— Si $\lambda > 0$ et $\mu \leqslant 0$, alors $(\lambda a_n + \mu d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(\lambda b_n + \mu c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F.

— Si $\lambda \leqslant 0$ et $\mu > 00$, alors $(\lambda b_n + \mu c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(\lambda a_n + \mu d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F.

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 8. ●◐○ Montrer que $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant A|x|\}$ est un sous-espace vectoriel, mais que $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant |x|\}$ n'en est pas un.

Correction

Déjà la fonction nulle appartient à F. Ensuite, si f et g sont dans F, on dispose de A et de B strictement positifs tels que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant A|x|$ et $|g(x)| \leqslant B|x|$. Donc, si λ et μ sont dans $\mathbb{R}$, et x est dans $\mathbb{R}$, $|\lambda f(x) + \mu g(x)| \leqslant (|\lambda|A + |\mu|B)|x|$, donc $\lambda f + \mu g$ est dans F. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
En revanche $\varphi : x \mapsto |x|$ est dans G mais pas 2φ. Donc G n'est pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2.2 Combinaisons linéaires et Vect, familles libres

Exercice 9. *Combinaisons linéaires*. ●○○

1. On considère les vecteurs $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, -3)$ et $v_3 = (-3, -1, m)$, où m est un réel. À quelle condition sur le paramètre m le vecteur v_3 est-il combinaison linéaire de v_1 et v_2 ?

Correction

On résout le système $v_3 = xv_1 + yv_2$ d'inconnues x et y réelles.

$$\begin{cases} -x+2y=-3 \\ 2x+3y=-1 \\ x-3y=m \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, on obtient

$$\begin{cases} -x+2y=-3 \\ 7y=-7 \\ -y=m-3 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} y=-1 \\ x=2y+3=11 \quad = m-3 \end{cases}$$

Donc il y a une unique solution si, et seulement si $m=4$.

2. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, $P = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $Q = 8X^3 - 5X^2 + 1$ et de $R = X^2 + 7X - 2$?

Correction

Oui, $2Q + 3R = P$.

3. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \cos(2x)$ est-il combinaison linéaire de $x \mapsto 1$ et de $x \mapsto \cos^2(x)$? De $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$?

Correction

Oui pour la première ! $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
Mais non pour la seconde : supposons qu'il existe λ et μ tels que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\cos(2x) = \lambda \sin(x) + \mu \cos(x).$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient $\mu = 1$. En évaluant en $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient $\lambda = -1$. Donc $\cos(2x) = -\sin(x) + \cos(x)$. Ceci est absurde, en évaluant en $-\dfrac{\pi}{2}$, on obtient $-1 = 1$.

Exercice 10. ●●○ Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ soit combinaison linéaire des vecteurs $(1, j, j^2)$, $(j, j^2, 1)$, $(j^2, 1, j)$.

Correction

On note $u = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} j^2 \\ 1 \\ j \end{pmatrix}$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$, $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$. Alors

$$\begin{cases} \lambda + \mu j + \nu j^2 = x \\ \lambda j + \mu j^2 + \nu = y \\ \lambda j^2 + \mu + \nu j = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu j + \nu j^2 = x \\ \lambda + \mu j + \nu j^2 = j^2 y \; L_2 \leftarrow j^2 L_2 \\ \lambda + \mu j + \nu j^2 = jz \; L_3 \leftarrow jL_3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu j + \nu j^2 = x \\ 0 = j^2 y - x \; L_2 \leftarrow j^2 L_2 \\ 0 = jz - x \; L_3 \leftarrow jL_3 \end{cases}$$

Donc une CNS pour qu'un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire de (u, v, w) est $x = j^2 y = jz$.

Exercice 11. ●◐○ Les systèmes suivants de vecteurs sont-ils libres ?

(i) $E = \mathbb{R}^3$, $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, a, b)$, $u_3 = (1, a^2, b^2)$ (on discutera selon la valeur de a et b)

Correction

Il faut résoudre un système linéaire : $xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + a^2 y = 0 \\ x + by + b^2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ (a-1)y + (a^2-1)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (b-1)y + (b^2-1)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow (S)$$

Si $a = 1$ ou $b = 1$, ou $a = b$ alors la deuxième ligne s'annule, donc on a un système échelonné avec deux équations uniquement, donc il admet des solutions non triviales. Donc la famille n'est pas libre. En revanche, on suppose que $a \neq 1$ et $b \neq 1$. Alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + (a+1)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2/(a-1) \\ y + (b+1)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3/(b-1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + (a+1)z = 0 \\ (b-a)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

On a alors un système échelonné à trois équations, trois inconnues, donc il n'a qu'une seule solution, la solution nulle, donc la famille est libre !

(ii) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_1 : x \mapsto \sin(x+1)$, $f_2 : x \mapsto \sin(x+2)$, $f_3 : x \mapsto \sin(x+3)$.

Correction

Question plus piégeuse, mais en fait assez simple. Il **faut savoir** qu'il y a des formules permettant d'explrimer $\sin(p)+\sin(q)$ en fonction de $\dfrac{p+q}{2}$ et $\dfrac{p-q}{2}$:

$$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Donc pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_1(x)+f_3(x) &= \sin(x+1)+\sin(x+3) \\ &= 2\sin\left(\frac{x+1+(x+3)}{2}\right)\cos\left(\frac{x+1-(x+3)}{2}\right) \\ &= 2\sin(x+2)\cos(-1) \\ &= 2\cos(1)f_2(x). \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f_1 - 2\cos(1)f_2 + f_3 = 0$, donc la famille est liée.

(iii) $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_1 : x \mapsto \ln(x+1)$, $f_2 : x \mapsto f_1 \circ f_1$, $f_3 : x \mapsto f_1 \circ f_1 \circ f_1$.

Correction

Soient λ, μ et ν tels que $\lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3 = 0$. Alors pour tout x tel que $f_1(x) \neq 0$,

$$\lambda + \mu\frac{f_2}{f_1} + \nu\frac{3_3}{f_1} = 0.$$

Or, quand $u \to +\infty$, $\dfrac{\ln(u)}{u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{f_3(x)}{f_1(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, par unicité de la limite, $\lambda = 0$. De même on montre que μ et ν sont nuls.

(iv) $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ où $f_a : x \mapsto e^{ax}$.

Correction

SOIENT $n \in \mathbb{N}$, $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$, i.e. tels que pour tout x,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{a_i x} = 0.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Soit alors

$$A = \{i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \neq 0\}.$$

Si A est vide, c'est gagné. Sinon soit $p=\sup(A)$. Alors

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e^{a_i x} = 0,$$

avec $\lambda_p \neq 0$. Alors, en divisant par e^{px} et en faiant x vers $+\infty$< on obtient $\lambda_p = 0$ absurde ! Donc $A = \emptyset$.

Exercice 12. ●●○

1. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)\sin(x) + Q(x)\cos(x) = 0$. Montrer que $P = Q = 0$.

Correction

Pour tout entier naturel k,

$$P(2k\pi)\sin(2k\pi) + Q(2k\pi)\cos(2k\pi) = 0,$$

i.e. $Q(2k\pi) = 0$. Donc Q admet une infinité de racines, donc Q est nul. De même, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $P\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$ donc P est nul.

2. On pose, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $f_p : x \mapsto x^p \sin(x)$ et $g_q : x \mapsto x^q \cos(x)$. Que peut-on dire de la famille $(f_p)_{p\geqslant 0} \cup (g_q)_{q\geqslant 0}$?

Correction

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ et $\mu_0, \dots, \mu_m$ $n + m$ réels tels que

$$\sum_{p=0}^{n} \lambda_p f_p + \sum_{q=0}^{m} \mu_q g_q = 0.$$

Alors si l'on pose $P(X) = \sum_{p=0}^{n} \lambda_p X^p$ et $Q(X) = \sum_{q=0}^{m} \mu_q X^q$, on a, pour tout x de $\mathbb{R}$, $P(x)\sin(x) + Q(x)\cos(x) = 0$. Donc, par la question précédente, $P = Q = 0$.

Exercice 13. ●●○ Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(u_1, \dots, u_n)$ une famille d'éléments de E. Pour tout k, on pose $v_k = u_1 + \cdots + u_k$.

1. Démontrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est libre si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est libre.
2. Démontrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice.

Exercice 14. *Un excursion dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel*. ●●◐ Soit $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des nombres premiers ($p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$)

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, si une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$ des vecteurs $(\ln(p_k))_{k=1,2,\dots,p}$ du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}, +, .)$ est nulle, alors tous les coefficients sont nuls.
2. En déduire qu'il ne peut pas exister un ensemble fini de nombres réels $(x_i)_{i\in I}$ (où I est un ensemble fini) tel que pour tout réel x, il existe une famille $(q_i)_{i\in I}$ de nombres rationnels tels que $x = \sum_{i\in I} q_i.x_i$. *Ceci s'interprète en disant que $(\mathbb{R}, +, .)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.*

 nlaillet.math@gmail.com

2.3 Somme de sous-espaces vectoriels, espaces vectoriels supplémentaires

Exercice 15. ●◐○ Soit $E = \mathbb{R}^3$, et soient

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\}$
- $g = (1, 1, 1)$ et $G = \mathrm{Vect}(g)$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Correction

Déjà F est non vide parce que $(0, 0, 0) \in F$.
Ensuite, si (x, y, x) et (x', y', z') sont dans F, et λ et μ sont dans $\mathbb{R}$, alors

$$\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z'),$$

et

$$(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = \lambda(x - y + z) + \mu(x' - y' + z') = 0,$$

donc $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') \in F$, donc F est un sous-espace vectoriel de E.
Rq méthode : remarquez bien que puisque F est défini par une condition, pour vérifier l'appartenance à F, il suffit de vérifier cette condition !

2. En résolvant le système $x - y + z = 0$, déterminer une base de F.

Correction

On résout le système $x - y + z = 0$. Il est déjà échelonné, donc on pose $z = \alpha$ et $y = \beta$, d'où $x = -\alpha + \beta$, donc l'ensemble des solutions du système est

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\alpha + \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(u, v), \quad \text{où} \ \ u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc (u, v) engendre F et est libre dans F, donc (u, v) forme une base de F.

3. Montrer que $E = F \oplus G$.

Correction

On pose $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour montrer que $E = F \oplus G$, il suffit de montrer qu'en concaténant les bases de F et de G, on obtient une base de E : résolvons pour cela le système

$\lambda u + \mu v + \nu w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, d'inconnues réelles λ, μ, ν. La matrice du système est

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & a+c \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & a+c \end{pmatrix} L_1 \leftarrow -L_1$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & a-b+c \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & -a+2b-c \\ 0 & 0 & 1 & a-b+c \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

Donc le système a une unique solution, $\lambda = b - a$, $\mu = -a + 2b - c$ et $\nu = a - b + c$. Donc (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, donc la somme est directe.

4. Soit p le projecteur sur G parallèlement à F. Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer les coordonnées de $p(x, y, z)$.

Correction

Par l'expression précédente, on sait que pour tout (x, y, z) dans F, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (y - z)u + (-x + 2y - z)v + (x - y + z)w,$$

donc la composante selon G de (x, y, z) est $(x - y + z)w$, donc

$$p(x, y, z) = (x - y + z, x - y + z, x - y + z).$$

Exercice 16. ●◐○ Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :

(i) $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$

Correction

Soit $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$. On dispose de $y \in F \cap G$ et de $z \in F \cap H$ tels que $x = y + z$. Alors $y \in F$, $z \in F$, donc $x \in F$. De plus, $y \in G$, $z \in H$, donc $x \in G + H$. Donc $x \in F \cap (G + H)$.

(ii) $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$.

Correction

Soit $x \in F + (G \cap H)$. Alors on dispose de $y \in F$, de $z \in G \cap H$, tels que $x = y + z$. Alors $y \in F$, $z \in G$, donc $x \in F + G$. De même, $y \in F$, $z \in H$, donc $x \in F + H$. Donc $x \in F + H$.

Exercice 17. ●●○
Soient E_1, E_2, E_3 trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

On suppose que $\begin{cases} E_1 + E_3 = E_2 + E_3, \\ E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3, \\ E_1 \subset E_2. \end{cases}$

1. Montrer que $E_1 = E_2$.

Correction

Montrons que $E_2 \subset E_1$. Soit $x \in E_2$. Alors $x \in E_2 + E_3 = E_1 + E_3$, donc on dispose de y dans E_1 et de z dans E_3 tels que $x = y + z$. Alors $y \in E_1$, donc $y \in E_2$, donc $z = x - y \in E_2$, donc $z \in E_2 \cap E_3 = E_1 \cap E_3$. Donc $z \in E_1$, donc $y + z \in E_1$, i.e. $x \in E_1$. D'où le résultat.

2. En déduire le corollaire suivant : si $E_1 \oplus E_3 = E_2 \oplus E_3$ et $E_1 \subset E_2$, alors $E_1 = E_2$.

Correction

Il suffit de remarquer qu'en cas de somme directe, on a $E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \{0\}$.

3. Montrer que le résultat est faux si on ne suppose pas $E_1 \subset E_2$.

Correction

Il suffit de prendre trois droites du plan deux à deux non confondues.

Exercice 18. ●●○ Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ $n + 1$ réels deux à deux distincts, et

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(\alpha_0) = \cdots = P(\alpha_n) = 0\},$$
$$G = \mathbb{R}_n[X].$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}[X]$.

Correction

Soit P dans $\mathbb{R}[X]$.
Analyse. Supposons que $P = Q + R$ avec Q dans F et R dans G. Comme $Q \in F$, on sait que $Q(\alpha_1) = \cdots = Q(\alpha_n) = 0$. Comme les $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont deux à deux distincts, on en déduit que $(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$ sont deux à deux distincts, donc si $A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$, alors $Q = AS$. Donc $P = AS + R$ avec $\deg(R) < \deg(A)$. Par unicité de la division euclidienne des polynômes, S est le quotient et R est le reste de la division euclidienne de P par A. D'où l'unicité.

 nlaillet.math@gmail.com

Synthèse. Soit (S, R) le quotient et le reste de la division euclidienne de P par A. Posons $Q = AS$.

- par définition de la division euclidienne, $R \in \mathbb{R}_n[X]$.
- par définition de la division euclidienne, $P = AS + R$.
- par définition de A, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $A(\alpha_i) = 0$ donc $Q(\alpha_i) = 0$ donc $Q \in F$.

D'où l'existence, et la supplémentarité !

Exercice 19. ●●◐ Soient E, F et G les trois sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} E &= \{(u_n)_{n\geqslant 0},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}. \\ F &= \{(u_n)_{n\geqslant 0},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = 0\}. \\ G &= \{(u_n)_{n\geqslant 0},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Correction

La vérification « à la main » ne pose pas de problème, mais je voudrais présenter une autre méthode, liée aux applications linéaires. Soit S l'application de shift :

$$S : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}. \end{array} \right.$$

Alors S est linéaire, et $E = \ker(S^3 - S^2 - S + \mathrm{Id})$, $F = \ker(S + \mathrm{Id})$, $G = \ker(S^2 - 2S + \mathrm{Id})$, donc E, F et G sont des espaces vectoriels.

2. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

Correction

Déjà on vérifie que F et G sont dans E.

- si (u_n) est dans F, alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = 0$, et donc
$$(u_{n+3} + u_{n+2}) - 2(u_{n+2} + u_{n+1}) + (u_{n+1} + u_n) = 0,$$
donc (u_n) est dans E.
- si (u_n) est dans G, alors pour tout entier naturel n, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$, i.e.
$$u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1} + u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0,$$
i.e. $u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$, donc (u_n) est dans E.

Ensuite, pour montrer que F et G sont supplémentaires, décrivons plus en détail les éléments de F et de G :

- les éléments de F sont les suites vérifiant $u_{n+1} = -u_n$, i.e. les suites géométriques de raison -1, i.e. les suites de la forme $a.(-1)^n$, avec a un réel.

- les éléments de G sont les suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$, i.e., comme 1 est racine double du polynôme carctéristique de la relation de récurrence, les suites de la forme $b + cn$, avec b et c deux réels.

Montrons alors que toute suite de E s'écrit de manière unique sous la forme $a.(-1)^n + b + cn$, avec a, b et c trois réels.
Analyse. Soit (u_n) dans E telle que pour tout entier naturel n, $u_n = a.(-1)^n + b + cn$, avec a, b et c trois réels. Alors

$$\begin{cases} u_0 = a + b, \\ u_1 = -a + b + c, \\ u_2 = a + b + 2c, \end{cases}$$

donc $c = \dfrac{u_2 - u_0}{2}$, $b = \dfrac{2u_1 + 3u_0 - u_2}{4}$ et $a = \dfrac{u_0 - 2u_1 + u_2}{4}$. D'où l'unicité de la décomposition.
Synthèse. Soit (u_n) dans E. Posons pour n dans $\mathbb{N}$,

$$v_n = a.(-1)^n + b + cn,$$

avec $c = \dfrac{u_2 - u_0}{2}$, $b = \dfrac{2u_1 + 3u_0 - u_2}{4}$ et $a = \dfrac{u_0 - 2u_1 + u_2}{4}$. Alors $u_0 = v_0$, $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ et pour tout entier naturel n, on a $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$ **et** $v_{n+3} = v_{n+2} + v_{n+1} - v_n$, donc par une récurrence immédiate, $v_n = u_n$ pour tout entier naturel n.

3 Applcations linéaires

3.1 Définitions

Exercice 20. ●○○ Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{array} \right.$

2. $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, xy, x - z) \end{array} \right.$

3. $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, 2x + 5z, 0) \end{array} \right.$

4. $h : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x - 3y, x + y, z + 2) \end{array} \right.$

5. $\theta : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' - P^2 \end{array} \right.$

6. $\psi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P(X) \mapsto P(X + 1) \end{array} \right.$

7. $\kappa : \left| \begin{array}{l} \{\text{suites convergentes}\} \to \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} u_n \end{array} \right.$

8. $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^T \end{array} \right.$

Correction

Non, Non, Oui, Non, Non, Oui, Oui, Oui

3.2 Noyau et image

Exercice 21. ◐○○ Soit φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \varphi(x,y,z) = (x+2y, 4x-y+z, 2x+2y+3z).$$

Montrer que φ appartient à $\mathrm{GL}(E)$ et déterminer φ^{-1}.

Correction

Déjà φ est linéaire car canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Ensuite, déterminons la bijectivité de φ. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) = (a,b,c) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = a \\ 4x-y+z = b \\ 2x+2y+3z = c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = a & \\ -9y+z = b-4a & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ -2y+3z = c-2a & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = a & \\ -9y+z = b-4a & \\ 25y = c+10a-3b & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{D'où} \begin{cases} y = \dfrac{1}{25}(10a-3b+c) \\ z = \dfrac{1}{25}(-10a-2b-9c) \\ x = \dfrac{1}{25}(5a+6b-2c) \end{cases}$$

D'où le résultat : φ est bijective et pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi^{-1}(a,b,c) = \dfrac{1}{25}(5a+6b-2c, 10a-3b+c, -10a-2b-9c)$.

Exercice 22. ●○○ Soient f, g, h, k les 4 endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ définis par, pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$,

1. $f(P) = P'$,
2. $g(P) = XP$,
3. $h(P)$ est l'unique primitive de P qui s'annule en 0,
4. $k(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par X^5.

Ces endomorphismes sont-ils injectifs ? Surjectifs ? Déterminer leur noyau et leur image.

Correction

(a) f n'est pas injective car $\ker(f)$ est l'ensemble des polynômes constants. Elle est surjective car si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $P = Q'$ où $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$.

(b) g est injective car si $XP = 0$ alors $P = 0$. Elle n'est pas surjective car si P est non nul, $\deg(g(P)) = 1 + \deg(P) > 0$, donc les polynômes constants n'ont pas d'antécédent par g.

(c) h est injective : si $h(P) = 0$, alors, comme $h(P)' = P$, $P = 0$. En revanche elle n'est pas surjective car l'image de h est incluse dans les polynômes s'annulant en 0. Elle est d'ailleurs égale à ce sous-espace vectoriel, en posant, si P s'annule en 0, $Q = P'$. Alors $h(Q) = P$, car $h(Q)' = Q = P'$ et $h(Q)$ et P s'annulent en 0.

(d) Enfin, k n'est pas surjective : son image est égal à $\mathbb{R}_4[X]$. Il est inclus dedans car un reste de division euclidienne par X^5 est nécessairement de degré inférieur ou égal à 4, et il contient $\mathbb{R}_4[X]$ car si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 4, il est égal à son reste dans la division euclidienne par X^5.
k n'est pas non plus injective : $k(X^5) = 0$. On peut même montrer que $\ker(k) = \{X^5P,\ P \in \mathbb{R}[X]\}$. En effet, si $P \in \ker(k)$, son reste dans la division euclidienne par X^5 est nul, donc $P \in \{X^5P,\ P \in \mathbb{R}[X]\}$. Réciproquement, tout multiple de X^5 a un reste dans la division euclidienne par X^5 nul.

Exercice 23. ●●○ Montrer que l'application partie entière Ent : $\mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}[X]$ est linéaire et déterminer son noyau.

Correction

Linéarité.
Soient $R_1 = \frac{P_1}{Q_1}$ et $R_2 = \frac{P_2}{Q_2}$ deux fractions rationnelles, E_1 et E_2 leurs parties entières. Alors $P_1 = E_1Q_1 + F_1$ et $P_2 = E_2Q_2 + F_2$, avec $\deg(F_1) < \deg(Q_1)$ et $\deg(F_2) < \deg(Q_2)$. Soient λ et μ dans $\mathbb{K}$. Alors

$$\lambda\frac{P_1}{Q_1} + \mu\frac{P_2}{Q_2} = \frac{\lambda P_1Q_2 + \mu P_2Q_1}{Q_1Q_2}.$$

Or, $\lambda P_1Q_2 + \mu P_2Q_1 = \lambda E_1Q_1Q_2 + \mu E_2Q_2Q_1 + \lambda F_1Q_2 + \mu F_2Q_1$, avec $\lambda F_1Q_2 + \mu F_2Q_1 < Q_1Q_2$.
Donc la partie entière de $R_1 + R_2$ est $\lambda E_1 + \mu E_2$.
Noyau.
On sait enfin qu'une fraction rationnelle a une partie entière nulle si, et seulement si son degré est strictement négativ, donc $\ker(\text{Ent}) = \{R \in \mathbb{K}(X),\ \deg(R) < 0\}$.

Exercice 24. ●●○ Soit $\Psi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par

$$\Psi(f) \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \int_0^x \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_0^x tf(t)dt \end{array} \right.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

1. Montrer que Ψ est une application linéaire bien définie. Est-elle injective ? est-elle surjective ?
2. Montrer que $\operatorname{Im}\Psi = \left\{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid g(0) = 0, g'(0) = 0, g' \text{ est dérivable en } 0\right\}$.

Exercice 25. ●◐○ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, et $f : F \times G \to E, \quad (x, y) \mapsto x + y$. Montrer que f est une application linéaire, préciser son image et son noyau.

Exercice 26. ●●○ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Montrer que

$$f(A) \subset f(B) \Longleftrightarrow A + \operatorname{Ker} f \subset B + \operatorname{Ker} f$$

Exercice 27. ●●○ Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Comparer $\ker f \cap \ker g$ et $\ker(f + g)$.

Correction

On a $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f + g)$. En effet, soit $x \in \ker f \cap \ker g$. Alors $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0$. Mais par exemple, si $f = \mathrm{Id}$ et $g = -\mathrm{Id}$, alors $\ker f \cap \ker g = \{0\}$ et $\ker(f + g) = E$.

2. Comparer $\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$ et $\mathrm{Im}(f + g)$.

Correction

On a $\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. En effet, si $y \in \mathrm{Im}(f + g)$, alors on dispose de x dans E tel que $f(x) + g(x) = y$. La réciproque est fausse en prenant $f = -g = \mathrm{Id}$.

3. Comparer $\ker f$ et $\ker f^2$.

Correction

On a $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. En effet, si $x \in \ker(f)$, alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$. La réciproque est fausse : prendre $f(x, y) = (0, x)$. Alors $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

4. Comparer $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} f^2$.

Correction

On a $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$, mais l'inclusion réciproque est fausse avec le même contre-exemple.

Exercice 28. ●●◐ Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Exprimer $u^{-1}(u(F))$ en fonction de F et de $\ker u$.

Correction

Analyse. Soit $x \in u^{-1}(u(F))$. Alors $u(x) \in u(F)$, i.e. on dispose de $y \in F$ tel que $u(x) = u(y)$. Alors $u(x-y) = 0$, i.e. $x - y \in \ker(u)$. Donc $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in \ker(u)$. Donc $u^{-1}(u(F)) \subset F + \ker u$.
Synthèse. Montrons que $F + \ker u \subset u^{-1}(u(F))$. Soit $x \in F + \ker u$. Alors on dispose de $y \in F$ et $z \in \ker u$ tels que $x = y + z$. Alors $u(x) = u(y) + u(z) = u(y) \in u(F)$.

2. Exprimer $u(u^{-1}(F))$ en fonction de F et de $\operatorname{Im} u$.

Correction

Analyse. Soit $x \in u(u^{-1}(F))$. Alors On dispose de $y \in u^{-1}(F)$ tel que $x = u(y)$. Alors $u(y) \in F$, i.e. $x \in F$. Donc $x \in F \cap \operatorname{Im} u$.
Synthèse. Si $x \in F \cap \operatorname{Im} u$, alors on dispose de $y \in E$ tel que $x = u(y)$. De plus $x \in F$ donc $u(y) \in F$ i.e. $y \in u^{-1}(F)$. Donc $x \in u(u^{-1}(F))$.

3. À quelle condition a-t-on $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$?

Correction

Pour avoir égalité des deux ensembles, il faut donc avoir $F + \ker(u) = F \cap \operatorname{Im}(u)$. Comme $F \cap \operatorname{Im}(u) \subset F \subset F + \ker(u)$, la condition se réécrit simplement $F + \ker(u) \subset F \cap \operatorname{Im}(u)$, i.e. $F \subset F \cap \operatorname{Im}(u)$ et $\ker(u) \subset F \cap \operatorname{Im}(u)$, i.e. $F = \operatorname{Im}(u)$ et $\ker(u) \subset F$. Réciproquement si $F = \operatorname{Im}(u)$ et $\ker(u) \subset F$, on a bien $F + \ker(u) = F \cap \operatorname{Im}(u)$.

Exercice 29. ●●○

1. Soient $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi : f \mapsto f''$.

(i) Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

Correction

Déjà, $\varphi(E) \subset E$ car la dérivée seconde d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ est $\mathscr{C}^\infty$. Soient f et g dans E, λ et μ dans $\mathbb{E}$. Alors $(\lambda f + \mu g)'' = \lambda f'' + \mu g''$.

(ii) Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\operatorname{Im}(\varphi)$.

Correction

$\ker(\varphi) = \{f \in \mathscr{C}^\infty,\ f'' = 0\} = \{x \mapsto ax + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. De plus, l'existence de primitives assure que $\operatorname{Im}(f) = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(iii) A-t-on $\ker(\varphi) \oplus \operatorname{Im}(\varphi) = E$?

Correction

Non, car $\operatorname{Im}(\varphi) = E$! !

2. Soient F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques, $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\psi : f \mapsto f'$.

(i) Montrer que $\psi \in \mathscr{L}(F)$.

Correction

Même résultat que dans la première question.

(ii) Montrer qu'un élément g de F admet sur $\mathbb{R}$ une primitive 2π-périodique si, et seulement si $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$.

Correction

Soit g dans F. Si g est 2π-périodique de moyenne nulle, alors

$$\begin{aligned}\int_0^{x+2\pi} g(t)dt &= \int_0^x g(t)dt + \int_x^{x+2\pi} g(t)dt \\ &= \int_0^x g(t)dt + \int_x^{2\pi} g(t)dt + \int_{2\pi}^{x+2\pi} g(t)dt\end{aligned}$$

Déjà $\displaystyle\int_0^x g(t)dt + \int_x^{2\pi} g(t)dt = \int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$ par hypothèse. Par un changement de variables $u = x+2\pi$ et par 2π-périodicité de g, $\displaystyle\int_{2\pi}^{x+2\pi} g(t)dt = \int_0^x g(t)dt$.
Donc $\displaystyle\int_0^{x+2\pi} g(t)dt$ est une primitive de g de moyenne nulle, et toute primitive de g est 2π-périodique.
Réciproquement, si g n'est pas de moyenne nulle, écrivons $VM(g) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt$, et écrivons $g = g - VM(g) + VM(g)$. Alors les primitives de g sont de la forme $x \mapsto h(x) + VM(g)x + K$, avec h périodique et $x \mapsto VM(g)x$ n'est pas bornée donc pas bornée. Donc g n'admet pas de primitive périodique.

(iii) Déterminer $\ker(\psi)$ et $\mathrm{Im}(\psi)$.

Correction

$\ker(\varphi)$ est l'ensemble des fonctions constantes. Par la question précédente, $\mathrm{Im}(\varphi)$ est l'ensemble des fonctions de valeur moyenne nulle.

(iv) A-t-on $\ker(\psi) \oplus \mathrm{Im}(\psi) = F$?

Correction

On a somme directe par le cours.

Exercice 30. *CCP MP*. ●●○ Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$.

Correction

Déjà, si $x \in \ker f$, alors $g \circ f(x) = g(0) = 0$. De plus, si $x \in \ker(g \circ f)$, alors $f(x) = f(g \circ f(x)) = f \circ g(f(x)) = 0$.
Ensuite, si $y \in \mathrm{Im} g \circ f$, alors $y = g \circ f(x)$ avec $x \in E$, donc $y = g(f(x))$, donc $y \in \mathrm{Im} g$.
De plus si $y \in \mathrm{Im} g$, alors on dispose de $x \in E$ tel que $y = g(x) = g(f(g(x))) = g \circ f(g(x)) \in \mathrm{Im} g \circ f$.

2. Montrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} g$.

Correction

Analyse. Soit x dans E, supposons qu'il existe $(y, z) \in \ker f \times \mathrm{Im} g$. Alors $f(x) = f(y) + f(z) = f(z)$. Or, $z \in \mathrm{Im} g$, donc $z = g(t)$ avec $t \in E$, donc $f(x) = f(g(t)) = t$. Donc $t = f(x)$ et $z = g(t) = g \circ f(x)$, donc $y = x - z$. D'où l'unicité.
Synthèse. Soit x dans E, posons $z = g \circ f(x)$ et $y = x - z$. Alors les propositions voulues sont vérifiées.

3. Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?

Correction

On peut conclure $g = f^{-1}$ si et seulement si f est inversible.

4. Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$

Correction

$(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ \mathrm{Id} \circ f = g \circ f$, donc $g \circ f$ est un projecteur.

Exercice 31. *CCP MP 2016*. ●●◐
Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

Correction

Raisonnons par analyse-synthèse. Soit x dans E.
Analyse. Supposons que $x = y + z$, où $y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $z \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$. Alors $f(x) = f(y) + f(z) = y + f(z)$, et $f^2(x) = f(y) + f^2(z) = y + f^2(z)$. Donc, en sommant tout, on trouve

$$x + f(x) + f^2(x) = 3y + z + f(z) + f^2(z).$$

Or, $z \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ donc on dispose de k dans E tel que $z = f(k) - k$. Donc

$$z + f(z) + f^2(z) = f(k) - k + f^2(k) - f(k) + f^3(k) - f^2(k) = f^3(k) - k = 0,$$

car $f^3 = \mathrm{Id}$. Donc

$$x + f(x) + f^2(x) = 3y,$$

donc $y = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x))$, donc $z = x - y = \frac{1}{3}(2x - f(x) - f^2(x))$.
Synthèse. Posons

$$y = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x)) \text{ et } z = \frac{1}{3}(2x - f(x) - f^2(x)).$$

Alors

(i) $y + z = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x) + 2x - f(x) - f^2(x)) = x$.

(ii) $f(y) = \frac{1}{3}(f(x) + f^2(x) + f^3(x)) = \frac{1}{3}(f(x) + f^2(x) + x) = y$ donc $y \in \ker(f - \mathrm{Id})$.

(iii)

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{3}(2x - f(x) - f^2(x)) \\ &= \frac{1}{3}(x - f(x) + x - f^2(x)) \\ &= \frac{1}{3}((f - \mathrm{Id})(-x) + f^3(x) - f^2(x)) \\ &= \frac{1}{3}((f - \mathrm{Id})(-x) + (f - \mathrm{Id})(f^2(x))) \\ &= (f - \mathrm{Id})\left(\frac{1}{3}(-x + f^2(x))\right) \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \end{aligned}$$

D'où l'existence de la décomposition, d'où la supplémentarité des deux espaces considérés.

2. Montrer que $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

Correction

L'inclusion la plus simple est l'inclusion réciproque.
$\boxed{\supset}$ Soit y dans $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$. Alors on dispose de x dans E tel que $y = f(x) - x$. Alors

$$(f^2 + f + \mathrm{Id})(y) = (f^2 + f + \mathrm{Id})(f - \mathrm{Id})(x) = (f^3 - \mathrm{Id})(x) = 0,$$

car $f^3 = \mathrm{Id}$. D'où le résultat.
$\boxed{\subset}$ Soit x dans $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id})$. Alors on sait que

$$x = y + z \text{ avec } y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \text{ et } z \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E).$$

Donc $y = x - z \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id})$ car $z \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \subset \ker(f^2 + f + \mathrm{Id})$.

Donc $y \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}) \cap \ker(f - \mathrm{Id})$.

Mais alors $f^2(y) + f(x) + y = 0$ et $f(y) = y$ donc $f^2(y) = y$ donc $3y = 0$ donc $y = 0$. Donc $x = z \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$. D'où l'inclusion directe.

3. Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

Correction

L'inclusion la plus simple est encore l'inclusion réciproque.
$\boxed{\supset}$ Soit y dans $\mathrm{Im}(f^2+f+\mathrm{Id})$. Alors on dispose de x dans E tel que $y = (f^2+f+\mathrm{Id})(x)$. Alors, comme précédemment, $(f-\mathrm{Id})(y) = (f-\mathrm{Id})(f^2+f+\mathrm{Id})(x) = (f^3-\mathrm{Id})(x) = 0$. D'où le résultat !

$\boxed{\subset}$ Soit x dans $\ker(f-\mathrm{Id})$. Alors $f(x) = x$ et $f^2(x) = x$, donc

$$x = \frac{1}{3}(x+x+x) = \frac{1}{3}(x+f(x)+f^2(x)) = (f^2+f+\mathrm{Id})\left(\frac{1}{3}x\right) \in \mathrm{Im}(f^2+f+\mathrm{Id}),$$

d'où l'inclusion directe.

3.3 Endomorphismes particuliers

Exercice 32. *Commutation et stabilisation.* ●●○
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E qui commutent.
On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par g si $g(F) \subset F$.

1. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Correction

Soit $x \in \ker(f)$. Alors $f \circ (g(x)) = g \circ f(x) = g(0) = 0$, donc $g(x) \in \ker f$. De même, si $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors on dispose de $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors $g(y) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$, donc $g(y) \in \mathrm{Im} f$.

2. Montrer que, pour tout λ dans $\mathbb{K}$, $\ker(f-\lambda\mathrm{Id})$ est stable par g.

Correction

Soit x dans $\ker(f-\lambda\mathrm{Id})$. Alors $f(x)-\lambda x = 0$, i.e. $f(x) = \lambda x$. Donc $g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$. De plus, comme $g \circ f = f \circ g$ donc $f(g(x)) = \lambda g(x)$, donc $(f-\lambda\mathrm{Id})(g(x)) = 0$, i.e. $g(x) \in \ker(f-\lambda\mathrm{Id})$. Donc $\ker(f-\lambda\mathrm{Id})$ est stable par g.

Exercice 33. ●●○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs qui commutent, i.e. tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.

Correction

Calculons $(p \circ q) \circ (p \circ q)$.

$$(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q = (p \circ p) \circ (q \circ q) = p \circ q.$$

Donc $p \circ q$ est un projecteur.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ et que $\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)$.

Correction

- Étude de l'image.
  Soit $x \in \mathrm{Im}(p \circ q)$. Alors on dispose de y tel que $x = p \circ q(y) = p(q(y))$. Donc $x \in \mathrm{Im}(p)$. De plus, $p \circ q = q \circ p$, donc $x = q \circ p(y) = q(p(y))$ donc $c \in \mathrm{Im}(q)$. Donc $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Donc $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.
  Soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Alors
  $$\begin{aligned} p \circ q(x) &= p(q(x)) \\ &= p(x) \text{ car } x \in \mathrm{Im}(q) \\ &= x \text{ car } x \in \mathrm{Im}(p). \end{aligned}$$
  Donc $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p \circ q)$, d'où l'égalité.
- Étude du noyau.
  Soit $x \in \ker(p \circ q)$. Alors $p \circ q(x) = 0$, donc $q(x) \in \ker(p)$. Donc on peut écrire $x = q(x) + (x - q(x))$. Vérifions que $x - q(x) \in \ker(q)$:
  $$q(x - q(x)) = q(x) - q(q(x)) = q(x) - q(x) = 0.$$
  Donc x s'écrit comme la somme d'un élément de $\ker(p)$ et d'un élément de $\ker(q)$. Donc $\ker(p \circ q) \subset \ker(p) + \ker(q)$.
  Soit $x \in \ker(p) + \ker(q)$. Alors on dispose de $f \in \ker(p)$ et $g \in \ker(q)$ tels que $x = f + g$. Alors
  $$\begin{aligned} p \circ q(x) &= p \circ q(f + g) \\ &= p \circ q(f) + p \circ q(g) \\ &= q(p(f)) + p(q(g)) \text{ car } p \circ q = q \circ p \\ &= 0 + 0 = 0 \text{ car } f \in \ker(p) \text{ et } g \in \ker(q). \end{aligned}$$

Exercice 34. ●●◐ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E. On suppose que $\mathrm{Im}(p) \subset \ker(q)$. Soit $r = p + q - p \circ q$.

1. Montrer que r est un projecteur.

Correction

Calculons $r \circ r$.

$$\begin{aligned} r \circ r &= (p+q-p\circ q)\circ(p+q-p\circ q) \\ &= p\circ p + p\circ q - p\circ p\circ q + q\circ p + q\circ q - q\circ p\circ q - (p\circ q)\circ p - (p\circ q)\circ q + (p\circ q)\circ(p\circ q) \\ &= p + p\circ q - p\circ q + q\circ p + q - q\circ p\circ q - p\circ q\circ p - p\circ q + p\circ q\circ p\circ q \\ &= p + q - p\circ q + q\circ p - q\circ p\circ q - p\circ q\circ p + p\circ q\circ p\circ q. \end{aligned}$$

Or, $\mathrm{Im} p \subset \ker q$, donc pour tout x, $p(x) \in \mathrm{Im}(p) \subset \ker(q)$, donc $q(p(x)) = 0$, donc $q \circ p = 0$. Donc

$$q\circ p - q\circ p\circ q - p\circ q\circ p + p\circ q\circ p\circ q = 0.$$

Donc $r \circ r = p + q - p\circ q = r$, donc r est un projecteur.

2. Déterminer $\ker(r)$ et $\mathrm{Im}(r)$.

Correction

- Déterminons le noyau de r.
  Analyse. Soit $x \in \ker(r)$. Alors $r(x) = 0$, i.e. $(p+q)(x) = p\circ q(x)$, i.e. en composant à gauche par p, $p(x) + p\circ q(x) = p\circ q(x)$, i.e. $p(x) = 0$. Donc $x \in \ker(p)$. De même, en composant à gauche par q, $q\circ p(x) + q(x) = q\circ p\circ q(x)$, i.e., comme $q\circ p = 0$, $q(x) = 0$. Donc $x \in \ker(q)$. Donc $x \in \ker(p)\cap\ker(q)$.
  Synthèse. Soit $x \in \ker(p)\cap\ker(q)$. Alors $p(x) + q(x) - p\circ q(x) = 0$.
  Donc $\ker(r) = \ker(p)\cap\ker(q)$.
- Déterminons l'image de r.
  Analyse. Soit $y \in \mathrm{Im}(r)$. Alors on dispose de $x \in E$ tel que $y = p(x) + q(x) - p\circ q(x)$. Or, $p(x) - p\circ q(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $q(x) \in \mathrm{Im}(q)$ donc $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.
  Synthèse. Soit $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Alors on dispose de $x \in E$ et $x' \in E$ tels que $y = p(x) + q(x')$. Alors

$$\begin{aligned} r(y) &= p(y) + q(y) - p\circ q(y) \\ &= p\circ p(x) + p\circ q(x') + q\circ p(x') + q\circ q(x') - p\circ q\circ p(x) - p\circ q\circ q(x') \\ &= p(x) + p\circ q(x') + 0 + q(x') - 0 - p\circ q(x') \text{ car } p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs et } q\circ p = 0 \\ &= p(x) + q(x') \\ &= y. \end{aligned}$$

  Donc $y \in \mathrm{Im}(r)$.

Exercice 35. ●●○ Soit p un projecteur de E.

1. L'ensemble des projecteurs de E est-il un sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$?

Correction

NON ! Id_E est un projecteur, mais $\mathrm{Id}_E + \mathrm{Id}_E = 2\mathrm{Id}_E$ n'est pas un projecteur.

2. Soit $\mathcal{P} = \{ap + b\mathrm{Id},\ (a,b) \in \mathbb{K}^2\}$.

(i) Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Correction

Déjà $0 = 0.p + 0.\mathrm{Id} \in \mathcal{P}$.
Ensuite, soient u et v deux éléments de $\mathcal{P}$, λ et μ dans $\mathbb{K}$. Alors on dispose de a, b, a' et b' quatre éléments de $\mathbb{K}$ tels que $u = ap + b.\mathrm{Id}$ et $v = a'p + b'.\mathrm{Id}$. Alors

$$\begin{aligned}\lambda u + \mu v &= \lambda(ap + b.\mathrm{Id}) + \mu(a'p + b'.\mathrm{Id})\\ &= (\lambda a + \mu a')p + (\lambda b + \mu b')\mathrm{Id},\end{aligned}$$

donc $\lambda u + \mu v \in \mathcal{P}$. Donc $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

(ii) Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-anneau de $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$, et montrer qu'il est commutatif.

Correction

Comme $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, c'est un sous-groupe de $(\mathscr{L}(E), +)$.
De plus, $\mathrm{Id} \in \mathcal{P}$ car $\mathrm{Id} = 0.p + 1.\mathrm{Id}$.
Enfin, soient u et v deux éléments de $\mathcal{P}$. Alors on dispose de a, b, a' et b' quatre éléments de $\mathbb{K}$ tels que $u = ap + b.\mathrm{Id}$ et $v = a'p + b'.\mathrm{Id}$. ALors

$$\begin{aligned}u \circ v &= (ap + b\mathrm{Id}) \circ (a'p + b'\mathrm{Id})\\ &= aa'.p \circ p + ab'.p \circ \mathrm{Id} + ba'\mathrm{Id} \circ p + bb'.\mathrm{Id} \circ \mathrm{Id}\\ &= (aa' + ab' + ba').p + (bb')\mathrm{Id} \in \mathcal{P}.\end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{P}, +, \circ)$ est un sous-anneau de $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$. De plus,

$$\begin{aligned}v \circ u &= (a'p + b'\mathrm{Id}) \circ (ap + b\mathrm{Id})\\ &= a'a.p \circ p + a'b.p \circ \mathrm{Id} + ba'\mathrm{Id} \circ p + b'b.\mathrm{Id} \circ \mathrm{Id} = (a'a + a'b + b'a).p + (b'b)\mathrm{Id} = u \circ v.\end{aligned}$$

Donc l'anneau est commutatif.

(iii) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{1\}$, $\mathrm{Id}_E - \lambda p$ est un automorphisme de E.

Correction

Si $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{1\}$, $\mathrm{Id} - \lambda p$ est de manière évidente un endomorphisme de E. Reste à montrer qu'il est bijectif. Soit $y \in E$. Résolvons l'équation $\mathrm{Id}(x) - \lambda p(x) = y$ par analyse-synthèse. Si $x \in E$ est solution de l'équation, alors $p(x) - \lambda p(x) = p(y)$, i.e. $p(x) = \dfrac{1}{1-\lambda}p(y)$. Alors $x = y + \lambda p(x) = y + \dfrac{\lambda}{1-\lambda}p(y)$. D'où l'unicité d'un antécédent de y par $\mathrm{Id} - \lambda p$. Réciproquement, si $x = y + \dfrac{\lambda}{1-\lambda} p(y)$, alors

$$\begin{aligned} x - \lambda p(x) &= y + \frac{\lambda}{1-\lambda} p(y) - \lambda p(y) - \frac{\lambda^2}{1-\lambda} p(y) \\ &= y + \frac{\lambda - \lambda(1-\lambda) - \lambda^2}{1-\lambda} p(y) = y. \end{aligned}$$

Donc tout élément de E admet un unique antécédent par $\mathrm{Id} - \lambda p$, donc $\mathrm{Id} - \lambda p$ est un endomorphisme bijectif, i.e. un automorphisme.

(iv) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{P}$.

Correction

Analyse. Soit u un élément inversible de $\mathcal{P}$. Alors on dispose de a et b dans $\mathbb{K}$ tels que $u = ap + b.\mathrm{Id}$. Si $b = 0$, alors $u = ap$ n'est pas inversible car un projecteur non égal à l'identité n'est pas inversible. Donc nécessairement $b \neq 0$. Donc $p = b(\mathrm{Id} - \lambda p)$, avec $\lambda = \dfrac{-b}{a}$. Si $\lambda = 1$, alors $p = b(\mathrm{Id} - p)$, non inversible par la question (i). Donc nécessairement, $\lambda \neq 1$, i.e. $a \neq -b$.
Synthèse. Soient a et b deux éléments de $\mathbb{K}$ tels que $b \neq 0$ et $a \neq -b$. Alors si $u = ap + b\mathrm{Id}$, $u = b(\mathrm{Id} - \lambda p)$ avec $\lambda = -\dfrac{a}{b} \neq 1$, donc, par la question précédente, u est inversible.
Conclusion. Les éléments inversibles de $\mathcal{P}$ sont les endomorphismes s'écrivant comme $ap + b\mathrm{Id}$ avec $b \neq 0$ et $a \neq -b$.

Exercice 36. *Mines 2015*. ●●○ Soit $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto \dfrac{1}{2}(P(X) + P(-X)) + \dfrac{X}{2}(P(X) - P(-X))$.

1. Montrer que Φ est linéaire.

Correction

Soient P et Q deux polynômes, λ et μ deux réels. Alors

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda P + \mu Q) &= \frac{1}{2}((\lambda P + \mu Q)(X) + (\lambda P + \mu Q)(-X)) + \frac{X}{2}((\lambda P + \mu Q)(X) - (\lambda P + \mu Q)(-X)) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda P(X) + \mu Q(X) + \lambda P(-X) + \mu Q(-X)) + \frac{X}{2}(\lambda P(X) + \mu Q(X) - \lambda P(-X) - \mu Q(-X)) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda P(X) + \lambda P(-X)) + \frac{X}{2}(\lambda P(X) - \lambda P(-X)) \\ &+ \frac{1}{2}(\mu Q(X) + \mu Q(-X)) + \frac{X}{2}(\mu Q(X) - \mu Q(-X)) = \lambda \Phi(P) + \mu \Phi(Q). \end{aligned}$$

Donc Φ est linéaire.

2. Montrer que $\ker \Phi = \{(X-1)Q; Q \in \mathbb{R}[X], Q \text{ impair}\}$.

Correction

Raisonnons par double inclusion.

Soit $P \in \ker(\Phi)$. Alors $\frac{1}{2}(P(X)+P(-X)) + \frac{X}{2}(P(X)-P(-X)) = 0$. En évaluant en 1, on obtient

$$\frac{1}{2}(P(1)+P(-1)) + \frac{1}{2}(P(1)-P(-1)) = 0,$$

i.e. $P(1) = 0$. Donc 1 est racine de P. Donc on dispose de Q dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-1)Q$. Alors

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= \frac{1}{2}\left((X-1)Q(X)+(-X-1)Q(-X)\right) + \frac{X}{2}\left((X-1)Q(X)-(-X-1)Q(-X)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((X-1+X^2-X)Q(X)+(-X-1+X^2+X)Q(-X)\right)\\ &= \frac{X^2-1}{2}(Q(X)+Q(-X)).\end{aligned}$$

Donc si $\Phi(P) = 0$, alors nécessairement $Q(X)+Q(-X) = 0$, donc Q est impair.

Réciproquement, soit P un polynôme tel que $P(X) = (X-1)Q(X)$ avec Q impair. Alors de même que précédemment, $\Phi(P) = \frac{X^2-1}{2}(Q(X)+Q(-X)) = 0$. Donc $P \in \ker(\Phi)$.

Donc $\ker(\Phi) = \{(X-1)Q,\ Q \text{ impair}\}$.

3. Montrer que $\mathrm{Im}\Phi \oplus \ker\Phi = \mathbb{R}[X]$ (on cherchera à caractériser Φ).

Correction

Calculons $\Phi \circ \Phi$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $\Phi(P) = \frac{1+X}{2}P(X) + \frac{1-X}{2}P(-X)$, donc

$$\begin{aligned}\Phi(\Phi(P)) &= \frac{1+X}{2}\left(\frac{1+X}{2}P(X)+\frac{1-X}{2}P(-X)\right) + \frac{1-X}{2}\left(\frac{1-X}{2}P(-X)+\frac{1+X}{2}P(X)\right)\\ &= \left(\frac{1+X}{2}+\frac{1-X}{2}\right)\left(\frac{1+X}{2}P(X)+\frac{1-X}{2}P(-X)\right)\\ &= \frac{1+X}{2}P(X)+\frac{1-X}{2}P(-X) = \Phi(P).\end{aligned}$$

Donc Φ est un projecteur, il s'agit donc de la projection sur $\mathrm{Im}(\Phi)$ parallèlement à $\ker(\Phi)$.

Donc en particulier $\ker(\Phi) \oplus \mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}[X]$.

Remarque. Plutôt que de faire le calcul un peu sale, on peut remarquer que $\Phi(P(-X)) = \Phi(P(X))$. Ceci simplifie grandement les calculs !

Indications.

1 Si vous pensez que vous avez affaire à un sev, refaites la preuve. Sinon, trois possibilités : montrez que 0 n'appartient pas à l'ensemble, ou bien trouvez deux éléments dont la somme n'appartient pas à l'ensemble, ou bien trouvez un élément et un scalaire dont le produit n'appartient pas à l'ensemble.

2 **1.** Attention, penser qu'être combinaison linéaire, c'est s'écrire comme somme **finie** d'éléments de la famille multipliés par des scalaires.

2. Revenir à la définition de la liberté, en déclarant bien ses variables.

3. Faire des opérations entre les vecteurs.

4. Essayez de deviner un supplémentaire, puis le démontrer.

3 **1.** Faites proprement les vérifications.

2. Déclarez bien vos variables !

3. Essayez de demontrer que l'image de φ est de la forme $\mathrm{Vect}(\cdots)$, et en déduire que φ n'est pas surjective.

4 **1.** Pensez que $\mathrm{Id}x = x$.

2. Pensez au fait que « en somme directe » signifie **uniquement** « d'intersection nulle » (on ne parle pas de supplémentaire ici !)

3. Revenir à la définition de la liberté.

4. S'inspirer fortement de la preuve de cours sur l'image et le noyau d'un endomorphisme qui commutent.

5. (a) La méthode doit être sue maintenant.

(b) Résoudre l'équation en posant $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Ne pas hésiter à commencer avec $n = 2$ par exemple.

5 **1.** Le sens réciproque est évident. Pour le sens direct, démontrer d'abord que $p \circ q + q \circ p = 0$, puis composer à gauche et à droite par p.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(p + 1) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ et que $\ker(p + q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

6 Mêmes conseils qu'en 1.

7 Mêmes conseils qu'en 1. Le (v) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles, le démontrer proprement en faisant attention aux signes.

8 Pour la première partie, utiliser l'inégalité triangulaire. Pour la seconde, penser à la fonction $x \mapsto x$.

9 **1.** Résoudre un système linéaire.

2. Idem.

3. Cf. exemples du cours.

10 Il s'agit juste d'une résolution de système linéaire !

11 **1.** Résoudre un système linéaire.

2. Penser aux dernières formules de trigonométrie !

3. Oui, penser à montrer que $f_2(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(f_1(x))$ et $f_3(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(f_2(x))$.

4. Bien déclarer ses variables. Ensuite, utiliser des arguments d'asymptotique, un peu comme à la question précédente.

12 **1.** Démontrer que Q s'annule en tous les $2k\pi$ et que P s'annule en tous les $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

2. Écrire une combinaison linéaire de ces fonctions, et la réécrire sous la forme $P(x)\sin(x) + Q(x)\cos(x)$.

14 **1.** Essayer par multiplier la relation pour avoir une combinaison à coefficients entiers des $\ln(p_i)$, puis se ramener à une égalité entre entiers, et à un problème de valuation p_i-adique !

2. Conséquence directe de la précédente.

15 **1.** Question usuelle de cours.

2. Résoudre le système linéaire et écrire l'ensemble des solutions sous la forme d'un Vect.

3. Résoudre un système linéaire, ou faire une analyse-synthèse.

4. Utiliser la décomposition vue à la question précédente.

16 C'est un exercice dans lequel il faut bien déclarer ses variables, et dérouler petit à petit les hypothèses. Par exemple, commencez le (i) par « Soit $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$. On dispose de $y \in F \cap G$ et de $z \in F \cap H$ tels que $x = y + z$. »

17 Même principe qu'à l'exercice 13. Pour le contre-exemple, en chercher un en dimension 2.

18 Faire une analyse-synthèse, penser au polynôme $(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n)$ et à une division euclidienne.

19 **1.** Se fait simplement.

2. Faire une analyse-synthèse.

20 Si vous en avez l'impression, faites la vérification. Si ce n'est pas le cas, vérifiez $f(0)$, ou trouvez un contre-exemple.

21 Il suffit de résoudre un système linéaire !

22 **1.** Montrer que f n'est pas injective, mais surjective. (on pensera aux constantes)

2. Montrer que g est injective mais pas surjective (on pensera à la valeur en 0)

3. Montrer que h est injective mais pas surjective (penser aux constantes et à la valeur en 0)

4. Montrer que k n'est ni surjective, ni injective : son image est $\mathbb{R}_4[X]$, et son noyau l'ensemble des multiples de X^5.

23 Raisonner sur le degré des fractions (qu'il s'agisse de la linéarité ou du noyau).

24 **1.** Elle est injective, pas surjective. Pour l'injectivité, dériver ! Pour la surjectivité, que vaut $\Psi(f)(0)$?

2. Raisonner par double inclusion

25 Vous devez voir apparaître la somme et l'intersection de F et G... !

26 Exercice pas très dur, qui demande juste d'utiliser la définition du noyau !

27 **1.** Démontrer qu'il y a l'inclusion directe mais pas, en général la réciproque (trouver un f et un g qui ne fonctionnent pas).

2. Démontrer qu'il y a l'inclusion réciproque mais pas l'inclusion directe.

3. Démontrer qu'il y a l'inclusion directe mais pas la réciproque.

4. Démontrer qu'il y a l'inclusion réciproque mais pas l'inclusion directe.

28 **1.** Démontrer que $u^{-1}(u(F)) = F + \ker(u)$.

2. Démontrer que $u(u^{-1}(F)) = F \cap \mathrm{Im}(u)$.

3. Démontrer que la condition est que $F = \mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u) \subset F$.

29 **1.**

2. Le (ii) a été fait dans le TD 6.

30 **Attention !** Dans cet exercice, vu qu'on n'a pas écrit $g \circ f = \mathrm{Id}$, on n'a pas, a priori, l'inversibilité de f.

1. Bien déclarer les variables.

2. Faire une analyse-synthèse.

31 **1.** Première question un peu technique, faire une analyse-synthèse, en composant l'égalité par f et f^2.

2. Procéder par double inclusion.

3. Idem !

32 Exercice essentiellement fait en classe et dans l'exercice 4.

33 **1.** Utiliser la caractérisation algébrique d'un projecteur.

2. Procéder par double inclusions.

34 **1.** Utiliser la caractérisation algébrique d'un projecteur.

2. Procéder par analyse-synthèse.

35 **1.** Non ! Trouver un contre-exemple dans le plan, avec trois droites non confondues.

2. (i) Vérification simple

(ii) Idem

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

(iii) Résoudre l'équation $\mathrm{Id}(x) - \lambda p(x) = y$ par analyse-synthèse.

(iv) Déterminer les éléments inversibles aussi par analyse-synthèse.

36 **1.** Simple vérification.

2. Raisonner par double inclusion : on montrera, pour l'inclusion directe, que $P(1) = 0$.

3. Démontrer que ϕ est un projecteur.