TD 18
Espaces vectoriels

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $E = \{(\alpha, 0, 2\alpha + \beta);\quad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$.
2. $F = \{(a, y, x) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = -1\}$.
3. $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2\}$.
4. L'ensemble des fonctions croissantes.
5. L'ensemble des polynômes de degré n.
6. L'ensemble des polynômes dont 1 est racine double.
7. $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\right\}$.
8. $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid u_{n\to+\infty}{=}_o \left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

Exercice 2.
1. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la fonction $x \mapsto e^x$ est-elle combinaison linéaire de $(x \mapsto x^k)_{k\in\mathbb{N}}$?
2. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?
3. La famille $(t \mapsto t^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est-elle libre dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$?
4. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}((X-1)^2, X^2-1, (X+1)^2)$.
5. Donner, dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, un supplémentaire de $F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0) = 0\}$, puis un supplémentaire de $G = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$.

Exercice 3. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, differente de 0_n. Soit φ l'application qui à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associe $\mathrm{Tr}(M)A$.

1. Démontrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$.
2. Déterminer $\ker(\varphi)$. φ est-elle injective ?
3. φ est-elle sujective ?

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, le *sous-espace propre* associé à λ est l'ensemble noté $E_\lambda(u) = \{x \in E,\ u(x) = \lambda x\}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Démontrer que $E_\lambda(u) = \ker(\varphi_\lambda)$, avec φ_λ un endomorphisme à préciser.
2. Soient λ et μ dans $\mathbb{K}$ tels que $\lambda \neq \mu$. Démontrer que $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont en somme directe.
3. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_\lambda(u)$ est stable par v.
4. Soit $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$, non nuls, $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ deux à deux distincts, tels que pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, $u(x_i) = \lambda_i x_i$. On va démontrer que la famille $(x_1, \dots, x_r)$ est libre dans E.
   (a) **Première preuve.** Démontrer le résultat par récurrence sur r.
   (b) **Deuxième preuve.** r est fixé. Soit $(\mu_1, \dots, \mu_r)$ dans $\mathbb{K}^r$ tels que $\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_r x_r = 0$.
   - Démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\mu_1 \lambda_1^k x_1 + \cdots + \mu_r \lambda_r^k x_r = 0$.
   - Démontrer que pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$, $\mu_1 P(\lambda_1) x_1 + \cdots + \mu_r P(\lambda_r) x_r = 0$.
   - En utilisant l'interpolation de Lagrange, conclure.
5. **Application.** Soit u défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = XP'$.
   (a) Démontrer que u est un endomorphisme.

(b) Déterminer, pour k dans $[\![0, n]\!]$, $E_k(u)$.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-ev, p et q deux projecteurs de E. Soit $r = p + q$.

1. Montrer que r est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. On suppose que r est un projecteur. Déterminer $\ker(r)$ et $\mathrm{Im}(r)$.

2 Espaces vectoriels

2.1 Définition

Exercice 6. ◐○○

Parmi tous ces ensembles, lesquels sont des espaces vectoriels ?

1. $E = \{(\alpha, 0, 2\alpha + \beta);\ \ \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$.
2. $F = \{(\alpha + 1, \alpha, -\alpha);\ \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.
3. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y + 2z = 0\}$.
4. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 1\}$.
5. $J = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z \geqslant 0\}$.
6. $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 2z\}$.
7. $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \leqslant 1\}$.
8. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$.
9. $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2\}$.

Exercice 7. ●◐○
Parmi tous ces ensembles, lesquels sont des espaces vectoriels ?

(i) L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissantes.
(ii) $\{P \in \mathbb{R}[X],\ \ P(0) = 1\}$.
(iii) L'ensemble des suites réelles convergentes.
(iv) L'ensemble des suites monotones.
(v) L'ensemble des suites qui s'écrivent comme la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante.

Exercice 8. ●◐○ Montrer que $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant A|x|\}$ est un sous-espace vectoriel, mais que $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant |x|\}$ n'en est pas un.

2.2 Combinaisons linéaires et Vect, familles libres

Exercice 9. *Combinaisons linéaires*. ●○○

1. On considère les vecteurs $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, -3)$ et $v_3 = (-3, -1, m)$, où m est un réel. À quelle condition sur le paramètre m le vecteur v_3 est-il combinaison linéaire de v_1 et v_2 ?
2. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, $P = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $Q = 8X^3 - 5X^2 + 1$ et de $R = X^2 + 7X - 2$?
3. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \cos(2x)$ est-il combinaison linéaire de $x \mapsto 1$ et de $x \mapsto \cos^2(x)$? De $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$?

Exercice 10. ●●○ Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ soit combinaison linéaire des vecteurs $\left(1, j, j^2\right)$, $\left(j, j^2, 1\right)$, $\left(j^2, 1, j\right)$.

Exercice 11. ●◐○ Les systèmes suivants de vecteurs sont-ils libres ?

(i) $E = \mathbb{R}^3$, $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,a,b)$, $u_3 = (1,a^2,b^2)$ (on discutera selon la valeur de a et b)

(ii) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_1 : x \mapsto \sin(x+1)$, $f_2 : x \mapsto \sin(x+2)$, $f_3 : x \mapsto \sin(x+3)$.

(iii) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_1 : x \mapsto \ln(x+1)$, $f_2 : x \mapsto f_1 \circ f_1$, $f_3 : x \mapsto f_1 \circ f_1 \circ f_1$.

(iv) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ où $f_a : x \mapsto e^{ax}$.

Exercice 12. ●●○

1. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)\sin(x) + Q(x)\cos(x) = 0$. Montrer que $P = Q = 0$.
2. On pose, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $f_p : x \mapsto x^p \sin(x)$ et $g_q : x \mapsto x^q \cos(x)$. Que peut-on dire de la famille $(f_p)_{p\geqslant 0} \cup (g_q)_{q\geqslant 0}$?

Exercice 13. ●●○ Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(u_1,\dots,u_n)$ une famille d'éléments de E. Pour tout k, on pose $v_k = u_1 + \cdots + u_k$.

1. Démontrer que $(u_1,\dots,u_n)$ est libre si et seulement si $(v_1,\dots,v_n)$ est libre.
2. Démontrer que $(u_1,\dots,u_n)$ est génératrice si et seulement si $(v_1,\dots,v_n)$ est génératrice.

Exercice 14. *Un excursion dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel*. ●●◐ Soit $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des nombres premiers ($p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$)

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, si une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$ des vecteurs $(\ln(p_k))_{k=1,2,\dots,p}$ du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $(\mathbb{R},+,.)$ est nulle, alors tous les coefficients sont nuls.
2. En déduire qu'il ne peut pas exister un ensemble fini de nombres réels $(x_i)_{i\in I}$ (où I est un ensemble fini) tel que pour tout réel x, il existe une famille $(q_i)_{i\in I}$ de nombres rationnels tels que $x = \sum_{i\in I} q_i.x_i$. *Ceci s'interprète en disant que $(\mathbb{R},+,.)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.*

2.3 Somme de sous-espaces vectoriels, espaces vectoriels supplémentaires

Exercice 15. ●◐○ Soit $E = \mathbb{R}^3$, et soient

- $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\}$
- $g = (1,1,1)$ et $G = \mathrm{Vect}(g)$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. En résolvant le système $x - y + z = 0$, déterminer une base de F.
3. Montrer que $E = F \oplus G$.
4. Soit p le projecteur sur G parallèlement à F. Si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer les coordonnées de $p(x,y,z)$.

Exercice 16. ●◐○ Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :

(i) $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$

(ii) $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$.

Exercice 17. ●●○
Soient E_1, E_2, E_3 trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On suppose que $\begin{cases} E_1 + E_3 = E_2 + E_3, \\ E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3, \\ E_1 \subset E_2. \end{cases}$

1. Montrer que $E_1 = E_2$.
2. En déduire le corollaire suivant : si $E_1 \oplus E_3 = E_2 \oplus E_3$ et $E_1 \subset E_2$, alors $E_1 = E_2$.
3. Montrer que le résultat est faux si on ne suppose pas $E_1 \subset E_2$.

Exercice 18. ●●○ Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ $n+1$ réels deux à deux distincts, et

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(\alpha_0) = \dots = P(\alpha_n) = 0\},$$
$$G = \mathbb{R}_n[X].$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 19. ●●◐ Soient E, F et G les trois sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$E = \{(u_n)_{n\geqslant 0},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}.$$
$$F = \{(u_n)_{n\geqslant 0},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = 0\}.$$
$$G = \{(u_n)_{n\geqslant 0},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\}.$$

1. Montrer que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

3 Applcations linéaires

3.1 Définitions

Exercice 20. ●○○ Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{array} \right.$
2. $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, xy, x - z) \end{array} \right.$
3. $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, 2x + 5z, 0) \end{array} \right.$
4. $h : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x - 3y, x + y, z + 2) \end{array} \right.$
5. $\theta : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' - P^2 \end{array} \right.$
6. $\psi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P(X) \mapsto P(X + 1) \end{array} \right.$
7. $\kappa : \left| \begin{array}{l} \{\text{suites convergentes}\} \to \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty} u_n \end{array} \right.$
8. $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^T \end{array} \right.$

 nlaillet.math@gmail.com

3.2 Noyau et image

Exercice 21. ◐○○ Soit φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \varphi(x, y, z) = (x + 2y, 4x - y + z, 2x + 2y + 3z).$$

Montrer que φ appartient à $\mathrm{GL}(E)$ et déterminer φ^{-1}.

Exercice 22. ●○○ Soient f, g, h, k les 4 endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ définis par, pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$,

1. $f(P) = P'$, **2**. $g(P) = XP$,

3. $h(P)$ est l'unique primitive de P qui s'annule en 0,

4. $k(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par X^5.

Ces endomorphismes sont-ils injectifs ? Surjectifs ? Déterminer leur noyau et leur image.

Exercice 23. ●●○ Montrer que l'application partie entière Ent : $\mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}[X]$ est linéaire et déterminer son noyau.

Exercice 24. ●●○ Soit $\Psi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\Psi(f) \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \displaystyle\int_0^x \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x tf(t)dt \end{array} \right.$$

1. Montrer que Ψ est une application linéaire bien définie. Est-elle injective ? est-elle surjective ?

2. Montrer que $\operatorname{Im} \Psi = \left\{ g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid g(0) = 0, g'(0) = 0, g' \text{ est dérivable en } 0 \right\}$.

Exercice 25. ●◐○ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, et $f : F \times G \to E, \quad (x, y) \mapsto x + y$. Montrer que f est une application linéaire, préciser son image et son noyau.

Exercice 26. ●●○ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Montrer que

$$f(A) \subset f(B) \iff A + \operatorname{Ker} f \subset B + \operatorname{Ker} f$$

Exercice 27. ●●○ Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Comparer $\ker f \cap \ker g$ et $\ker(f + g)$.

2. Comparer $\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$ et $\mathrm{Im}(f + g)$.

3. Comparer $\ker f$ et $\ker f^2$.

4. Comparer $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} f^2$.

Exercice 28. ●●◐ Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Exprimer $u^{-1}(u(F))$ en fonction de F et de $\ker u$.

2. Exprimer $u(u^{-1}(F))$ en fonction de F et de $\mathrm{Im} u$.

3. À quelle condition a-t-on $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$?

Exercice 29. ●●○

1. Soient $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi : f \mapsto f''$.

(i) Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

(ii) Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.

(iii) A-t-on $\ker(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi) = E$?

2. Soient F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques, $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\psi : f \mapsto f'$.

(i) Montrer que $\psi \in \mathscr{L}(F)$.

(ii) Montrer qu'un élément g de F admet sur $\mathbb{R}$ une primitive 2π-périodique si, et seulement si $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$.

(iii) Déterminer $\ker(\psi)$ et $\mathrm{Im}(\psi)$.

(iv) A-t-on $\ker(\psi) \oplus \mathrm{Im}(\psi) = F$?

Exercice 30. *CCP MP*. ●●○ Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$.

2. Montrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} g$.

3. Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?

4. Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$

Exercice 31. *CCP MP 2016*. ●●◐
Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

2. Montrer que $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

3. Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

3.3 Endomorphismes particuliers

Exercice 32. *Commutation et stabilisation*. ●●○
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E qui commutent.
On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par g si $g(F) \subset F$.

1. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

2. Montrer que, pour tout λ dans $\mathbb{K}$, $\ker(f - \lambda\mathrm{Id})$ est stable par g.

Exercice 33. ●●○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs qui commutent, i.e. tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ et que $\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)$.

Exercice 34. ●●◐ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E. On suppose que $\mathrm{Im}(p) \subset \ker(q)$. Soit $r = p + q - p \circ q$.

1. Montrer que r est un projecteur.
2. Déterminer $\ker(r)$ et $\mathrm{Im}(r)$.

Exercice 35. ●●○ Soit p un projecteur de E.

1. L'ensemble des projecteurs de E est-il un sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$?
2. Soit $\mathcal{P} = \{ap + b\mathrm{Id},\ (a, b) \in \mathbb{K}^2\}$.
   (i) Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
   (ii) Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-anneau de $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$, et montrer qu'il est commutatif.
   (iii) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{1\}$, $\mathrm{Id}_E - \lambda p$ est un automorphisme de E.
   (iv) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{P}$.

Exercice 36. *Mines 2015*. ●●○ Soit $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto \dfrac{1}{2}(P(X) + P(-X)) + \dfrac{X}{2}(P(X) - P(-X))$.

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Montrer que $\ker\Phi = \{(X - 1)Q; Q \in \mathbb{R}[X], Q \text{ impair}\}$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}\Phi \oplus \ker\Phi = \mathbb{R}[X]$ (on cherchera à caractériser Φ).

Indications.

1 Si vous pensez que vous avez affaire à un sev, refaites la preuve. Sinon, trois possibilités : montrez que 0 n'appartient pas à l'ensemble, ou bien trouvez deux éléments dont la somme n'appartient pas à l'ensemble, ou bien trouvez un élément et un scalaire dont le produit n'appartient pas à l'ensemble.

2
   1. Attention, penser qu'être combinaison linéaire, c'est s'écrire comme somme **finie** d'éléments de la famille multipliés par des scalaires.
   2. Revenir à la définition de la liberté, en déclarant bien ses variables.
   3. Faire des opérations entre les vecteurs.
   4. Essayez de deviner un supplémentaire, puis le démontrer.

3
   1. Faites proprement les vérifications.
   2. Déclarez bien vos variables !
   3. Essayez de demontrer que l'image de φ est de la forme $\mathrm{Vect}(\cdots)$, et en déduire que φ n'est pas surjective.

4
   1. Pensez que $\mathrm{Id}x = x$.
   2. Pensez au fait que « en somme directe » signifie **uniquement** « d'intersection nulle » (on ne parle pas de supplémentaire ici !)
   3. Revenir à la définition de la liberté.
   4. S'inspirer fortement de la preuve de cours sur l'image et le noyau d'un endomorphisme qui commutent.
   5. (a) La méthode doit être sue maintenant.
      (b) Résoudre l'équation en posant $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Ne pas hésiter à commencer avec $n = 2$ par exemple.

5
   1. Le sens réciproque est évident. Pour le sens direct, démontrer d'abord que $p \circ q + q \circ p = 0$, puis composer à gauche et à droite par p.
   2. Montrer que $\mathrm{Im}(p + 1) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ et que $\ker(p + q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

6 Mêmes conseils qu'en 1.

7 Mêmes conseils qu'en 1. Le (v) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles, le démontrer proprement en faisant attention aux signes.

8 Pour la première partie, utiliser l'inégalité triangulaire. Pour la seconde, penser à la fonction $x \mapsto x$.

9 **1.** Résoudre un système linéaire.
2. Idem.
3. Cf. exemples du cours.

10 Il s'agit juste d'une résolution de système linéaire !

11 **1.** Résoudre un système linéaire.
2. Penser aux dernières formules de trigonométrie !
3. Oui, penser à montrer que $f_2(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(f_1(x))$ et $f_3(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(f_2(x))$.
4. Bien déclarer ses variables. Ensuite, utiliser des arguments d'asymptotique, un peu comme à la question précédente.

12 **1.** Démontrer que Q s'annule en tous les $2k\pi$ et que P s'annule en tous les $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.
2. Écrire une combinaison linéaire de ces fonctions, et la réécrire sous la forme $P(x)\sin(x) + Q(x)\cos(x)$.

14 **1.** Essayer par multiplier la relation pour avoir une combinaison à coefficients entiers des $\ln(p_i)$, puis se ramener à une égalité entre entiers, et à un problème de valuation p_i-adique !
2. Conséquence directe de la précédente.

15 **1.** Question usuelle de cours.
2. Résoudre le système linéaire et écrire l'ensemble des solutions sous la forme d'un Vect.
3. Résoudre un système linéaire, ou faire une analyse-synthèse.
4. Utiliser la décomposition vue à la question précédente.

16 C'est un exercice dans lequel il faut bien déclarer ses variables, et dérouler petit à petit les hypothèses. Par exemple, commencez le (i) par « Soit $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$. On dispose de $y \in F \cap G$ et de $z \in F \cap H$ tels que $x = y + z$. »

17 Même principe qu'à l'exercice 13. Pour le contre-exemple, en chercher un en dimension 2.

18 Faire une analyse-synthèse, penser au polynôme $(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$ et à une division euclidienne.

19 **1.** Se fait simplement.
2. Faire une analyse-synthèse.

20 Si vous en avez l'impression, faites la vérification. Si ce n'est pas le cas, vérifiez $f(0)$, ou trouvez un contre-exemple.

21 Il suffit de résoudre un système linéaire !

22 **1.** Montrer que f n'est pas injective, mais surjective. (on pensera aux constantes)
2. Montrer que g est injective mais pas surjective (on pensera à la valeur en 0)
3. Montrer que h est injective mais pas surjective (penser aux constantes et à la valeur en 0)
4. Montrer que k n'est ni surjective, ni injective : son image est $\mathbb{R}_4[X]$, et son noyau l'ensemble des multiples de X^5.

23 Raisonner sur le degré des fractions (qu'il s'agisse de la linéarité ou du noyau).

24 **1.** Elle est injective, pas surjective. Pour l'injectivité, dériver ! Pour la surjectivité, que vaut $\Psi(f)(0)$?
2. Raisonner par double inclusion

25 Vous devez voir apparaître la somme et l'intersection de F et G... !

26 Exercice pas très dur, qui demande juste d'utiliser la définition du noyau !

27
1. Démontrer qu'il y a l'inclusion directe mais pas, en général la réciproque (trouver un f et un g qui ne fonctionnent pas).
2. Démontrer qu'il y a l'inclusion réciproque mais pas l'inclusion directe.
3. Démontrer qu'il y a l'inclusion directe mais pas la réciproque.
4. Démontrer qu'il y a l'inclusion réciproque mais pas l'inclusion directe.

28
1. Démontrer que $u^{-1}(u(F)) = F + \ker(u)$.
2. Démontrer que $u(u^{-1}(F)) = F \cap \mathrm{Im}(u)$.
3. Démontrer que la condition est que $F = \mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u) \subset F$.

29
1.
2. Le (ii) a été fait dans le TD 6.

30 **Attention !** Dans cet exercice, vu qu'on n'a pas écrit $g \circ f = \mathrm{Id}$, on n'a pas, a priori, l'inversibilité de f.
1. Bien déclarer les variables.
2. Faire une analyse-synthèse.

31
1. Première question un peu technique, faire une analyse-synthèse, en composant l'égalité par f et f^2.
2. Procéder par double inclusion.
3. Idem !

32 Exercice essentiellement fait en classe et dans l'exercice 4.

33
1. Utiliser la caractérisation algébrique d'un projecteur.
2. Procéder par double inclusions.

34
1. Utiliser la caractérisation algébrique d'un projecteur.
2. Procéder par analyse-synthèse.

35
1. Non ! Trouver un contre-exemple dans le plan, avec trois droites non confondues.
2. (i) Vérification simple
   (ii) Idem
   (iii) Résoudre l'équation $\mathrm{Id}(x) - \lambda p(x) = y$ par analyse-synthèse.
   (iv) Déterminer les éléments inversibles aussi par analyse-synthèse.

36
1. Simple vérification.
2. Raisonner par double inclusion : on montrera, pour l'inclusion directe, que $P(1) = 0$.
3. Démontrer que ϕ est un projecteur.