TD 19
Espaces vectoriels de dimension finie

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :
$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$,
$G = \mathrm{vect}\{(1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5)\} \subset \mathbb{R}^4$.

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que $G \subset F$ et conclure que $G = F$.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $n-1$. A-t-on $F \cup G = E$? Démontrer que F et G ont un supplémentaire commun.
2. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $p < n$. Montrer que F et G ont un supplementaire commun, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cet exercice, on illustre la notion de dimension dans $\mathbb{K}_n[X]$.

1. Démontrer que $(X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$
2. Soit n dans $\mathbb{N}$. Démontrer que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1} \\ \quad P \mapsto (P(0), P(1), \dots, P(n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-evdf, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ les formes linéaires coordonnées associées. Démontrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
   Application. Démontrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$,
$$\int_0^1 P(t)dt = \lambda_0 P(0) + \lambda_1 P\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \lambda_{n-1} P\left(\frac{n-1}{n}\right) + \lambda_n P(1).$$

Exercice 4. *Endomorphismes nilpotents*. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $u \in \mathscr{L}(E)$. u est dit *nilpotent* s'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$, où $u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

1. Soit u un endomorphisme nilpotent. En utilisant la formule du binôme de Newton ou de Bernoulli montrer que $\mathrm{Id} - u$ est inversible.
2. Justifier qu'il existe un plus petit entier p tel que $u^p = 0$. Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de u.
3. On veut montrer que $p \leqslant n$ (où p est l'indice de nilpotence de u). Pour ce faire, on définit, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $N_k = \ker(u^k)$. Montrer que pour tout entier k, $N_k \subset N_{k+1}$ et que s'il existe k_0 tel que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$, alors pour tout $\ell \geqslant k_0$, $N_\ell = N_{\ell+1}$. Conclure.
4. Retrouver le même résultat en démontrant que si x est un vecteur de E qui n'est pas dans $\ker(u^{p-1})$, alors $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux formes linéaires non nulles sur E. Montrer
$$\exists x \in E, f(x)g(x) \neq 0$$

Stratégie. Pour ce TD encore davantage que pour les autres, **ciblez vos besoins.** Je vous conseille de jauger votre niveau de compréhension de l'algèbre linéaire en dimension finie.

- si vous avez des difficultés en algèbre linéaire, lancez-vous sur des exercices **pratiques**, qui font appliquer petit à petit les théorèmes de cours : 6, 7, 13 et 14.
- ensuite, familiarisez-vous avec d'autres exemples : des polynômes (8, 9, 15, 16, 17) ou des matrices (10).
- enfin, n'hésitez pas à faire des exercices théoriques, c'est-à-dire les exercices 11, 12, puis des exercices théoriques sur les applications linéaires : 18, 20, 21, 22, 23.
- les exercices sur les formes linéaires sont un peu plus rares, mais faites quand même l'exercice 24.

Mon best of. Ce sont les exercices que je considère parmi les plus importants. Mais ne grillez pas d'étape et familiarisez-vous bien avec les notions ! Ce sont les exercices 9, 10, 12, 17, 18, 21, 23, 24. Dans ce best-of, je n'ai pas mis les exercices de base. **Encore une fois, je me répète, mais maîtrisez les bases avant de vous lancer dans ces exercices !**

2 Espaces vectoriels de dimension finie

2.1 Aspects pratiques

Exercice 6. ◐○○ Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y + z = 0\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y + 2z = 0\}. \end{aligned}$$

1. Donner une base de F, une base de G, en déduire leurs dimensions respectives.

Correction

Ici F et G sont définis par une seule équation, donc pour en trouver une base, deux méthodes sont possibles : on va en utiliser une pour F et l'autre pour G.

- **Première méthode (on l'applique à F).** Compléter l'équation : soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow \left\{x - 2y + z = 0 \right. \quad \Leftrightarrow \begin{cases} z = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ y = \beta, \ \beta \in \mathbb{R}, \\ x = 2\beta - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(u, v) \text{ où } u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Donc F est de dimension 2.

- **Deuxième méthode (on l'applique à G).** G est défini par une équation non nulle en dimension 3, donc (cf. partie sur les formes linéaires) $\dim(G) = 2$. Donc si on trouve deux vecteurs non colinéaires de G, on aura gagné. Par exemple, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc (u, w) est une base de G.

2. Donner une base de $F \cap G$, et donner sa dimension.

Correction

Là aussi, deux méthodes : la « standard » et une un peu plus astucieuse (mais qui montre que l'on a bien compris la notion de dimension).

- La méthode standard consiste à, pour une intersection, réunir les deux équations qui définissent les sous-espaces vectoriels correspondants. Ainsi, un système d'équations de $F \cap G$ est

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L2 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ x = -\alpha \end{cases}$$

  Donc $F \cap G = \mathrm{Vect}(u)$, où u a déjà été défini plus tôt !

- La méthode astucieuse consiste à dire que l'on voit clairement que $u \in F \cap G$ donc $F \cap G$ est de dimension $\geqslant 1$ et que, comme $F \neq G$ (on voit que $v \notin G$), alors $F \cap G$ est de dimension $\leqslant 1$, donc $F \cap G$ est de dimension $= 1$, donc $F \cap G = \mathrm{Vect}(u)$.

3. Déterminer $F + G$.

Correction

Là encore, on a de nombreuses possibilités :

- La méthode standard consiste à **concaténer** les vecteurs de base de F et G, i.e.

(u, v, w) : puis on échelonne ce système pour en déterminer son rang.

$$\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

donc le système est échelonné avec trois pivots, donc il est libre, donc la famille de ces trois vecteurs en dimension 3 est libre, donc elle forme une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $F + G = \mathbb{R}^3$. **Attention ! La famille obtenue après échelonnement des lignes n'a aucune raison d'être génératrice de $F + G$. J'ai juste fait cet échelonnement sur les lignes pour montrer qu'on pouvait aussi déterminer le rang de cette manière.**

- On aurait pu aussi écrire **beaucoup plus simplement** que $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3$, donc $F + G = \mathbb{R}^3$.

4. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Correction

Non, car leur intersection n'est pas réduite à 0 !

Exercice 7. ◐○○ On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Donner une base de F.

Correction

Déterminons une base de F en échelonnant le système linéaire et en posant les paramètres nécessaires.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \longrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

Posons $z = \alpha,\ t = \beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors $y = \alpha$, $x = -\alpha$, donc l'ensemble des solutions est

$$\{(-\alpha, \alpha, \alpha, \beta), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(u, v),$$

où $u = (-1, 1, 1, 0)$ et $v = (0, 0, 0, 1)$.

2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.

Correction

On remarque que (u, v) forme un début de base échelonnée. Si l'on prend $w = (0, 1, 0, 0)$ et $s = (0, 0, 1, 0)$, alors la famille (u, w, s, v) est échelonnée dans $\mathbb{R}^4$, donc libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

3. On pose $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?

Correction

On remarque que l'on va devoir déterminer une base d'une intersection dans les questions suivantes. Pour gagner du temps, échelonnons déjà le système en lignes avec des conditions de compatibilité

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 1 & 2 & 0 & y \\ 1 & 3 & -1 & z \\ 1 & 4 & 0 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y-x \\ 0 & 2 & 0 & z-x \\ 0 & 3 & 1 & t-x \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & -2 & x-2y+z \\ 0 & 0 & -2 & 2x-3y+t \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & -2 & x-2y+z \\ 0 & 0 & 0 & x-y-z+t \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array}$$

Donc la famille est de rang 3, donc libre.

4. On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3. Quelle est la dimension de G ? Donner une équation de G.

Correction

Par le calcul précédent, la dimension de G est 3 et une équation en est $x - y - z + t = 0$.

5. Donner une base de $F \cap G$.

Correction

Pour déterminer une base de $F \cap G$, on rassemble les équations trouvées, et on échelonne le système obtenu

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -y+z=0 \\ x-y-z+t=0 \end{cases} \longrightarrow_{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{cases} x+y=0 \\ -y+z=0 \\ -2y-z+t=0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow_{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{cases} x+y=0 \\ -y+z=0 \\ -3z+t=0 \end{cases}$$

Étant donnée la dernière équation, on peut poser indifféremment z ou t comme paramètre. Soyons malins et posons $z = \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors l'ensemble des solutions est

$$\{(-\alpha, \alpha, \alpha, 3\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(-1, 1, 1, 3).$$

Donc $F \cap G$ est de dimension 1.

6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Correction

Par la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) = 2+3-1 = 4$, donc $(F+G)$ est de dimension 4 dans $\mathbb{R}^4$, donc $F+G = \mathbb{R}^4$.

7. Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

Correction

On a existence, en revanche, on n'a pas unicité, car on n'a pas liberté de la famille.

2.2 Bases et dimension finie

Exercice 8. ●○○ Montrer que la famille $(X^3 - 2X + 1, X^3 + 2X, X^2 - 1)$ est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$, et la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Correction

Notons $P = X^3 - 2X + 1$, $Q = X^3 + 2X$ et $R = X^2 - 1$. Soient λ, μ, ν tels que

$$\lambda P + \mu Q + \nu R = 0.$$

Alors

$$X^3(\lambda + \mu) + X^2\nu + 2X(\mu - \lambda) + \lambda - \nu = 0,$$

donc $\nu = 0$ (terme en X^2) et donc $\lambda = 0$ (terme constant) et donc $\mu = 0$ (terme en X^3), donc $\lambda = \mu = \nu = 0$, donc la famille est libre.
On sait que $(P, Q, R, 1, X, X^2, X^3)$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$ (car la famille contient la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On peut donc la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$ en prenant un vecteur

de la base canonique. Si on prend X par exemple, on remarque que $\lambda P + \mu Q + \nu R + \zeta X = 0$ implique de la même manière que $\lambda = \mu = \nu = 0$, puis, en regardant le terme en X, $\zeta = 0$. Donc (P, Q, R, X) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 9. ●◐○ Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, on définit

$$B_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}.$$

Montrer que $(B_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction

On remarque que la famille $(B_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ contient $n+1$ vecteurs, dans un espace de dimension $n+1$. Il suffit donc de vérifier que la famille est libre.

Soit $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une famille de $n+1$ réels telle que $\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = 0$. Alors, en évaluant en 0, on remarque que $B_k(0) = 1$ si $k = 0$, 0 sinon. Donc $a_0 = 0$. Donc

$$a_1 B_1 + a_2 B_2 + \cdots + a_n B_n = 0.$$

En dérivant l'expression, et en évaluant en 1, on remarque que, comme 0 est racine simple de B_1 et racine multiple de tous les autres polynômes,

$$a_1 B_1'(0) = 0,$$

donc, comme $B_1'(0) \neq 0$, $a_1 = 0$. Puis on démontre par récurrence sur k que $a_0 = a_1 = \cdots = a_k = 0$.

L'initialisation vient d'être faite.

Pour **l'hérédité**, supposons que pour un certain k, on ait $a_0 = a_1 = \cdots = a_k = 0$. Alors la relation de liaison s'écrit

$$a_{k+1}B_{k+1} + \cdots + a_n B_n = 0.$$

Or, 0 est racine de multiplicité k de B_{k+1} et de multiplicité $\geqslant k+1$ de $B_{k+2}, \ldots, B_n$, donc, en dérivant k fois l'égalité et en évaluant en 0,

$$a_{k+1}B_{k+1}(k)(0) = 0,$$

donc, commce $B_{k+1}(k)(0) \neq 0$, $a_{k+1} = 0$.

D'où l'hérédité et la proposiiton par récurrence. Donc $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, donc la famille $(B_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre, de cartinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, donc elle en est une base.

Exercice 10. ●●○ Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un polynôme non nul P dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(M) = 0$.
(on rappelle que si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$, et si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P(M) = a_0\mathrm{I}_n + a_1M + a_2M^2 + \cdots + a_dM^d$).

Correction

On sait que $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$. Donc la famille $\mathrm{I}_n, M, \ldots, M^{n^2}$, qui contient n^2+1 éléments, est nécessairement liée. Donc on dispose de $a_0, \dots, a_{n^2}$ n^2+1 réels tels que

$$a_0 \mathrm{I}_n + a_1 M + \cdots + a_{n^2} M^{n^2} = 0,$$

i.e. $P(M) = 0$, avec $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n^2} X^{n^2}$.

2.3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Exercice 11. ●○○ Soit E un evdf, soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ $2n$ vecteurs de E tels que la famille $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ est libre. Montrer que $\mathrm{rg}(x_1 \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \geqslant n$.

Correction

On utilise le fait que l'on peut faire des opérations sur les vecteurs lorsque l'on détermine un Vect :

$$\mathrm{Vect}(x_1 \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \mathrm{Vect}(x_1 + y_1 \dots, x_n + y_n, y_1, \dots, y_n) \supset \mathrm{Vect}(x_1 + y_1 \dots, x_n + y_n),$$

donc

$$\mathrm{rg}(x_1 \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \dim(\mathrm{Vect}(x_1 \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)) \geqslant \dim(\mathrm{Vect}(x_1 + y_1 \dots, x_n + y_n)) = n,$$

car la famille est libre.

Exercice 12. ●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$. Montrer que F et G admettent au moins un vecteur non nul en commun.

Correction

On sait que $F + G \subset E$, donc $\dim(F + G) \leqslant \dim(E)$. Or, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$, donc $\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \leqslant \dim(E)$, donc $\dim(F \cap G) \geqslant \dim(F) + \dim(G) - \dim(E) > 0$, donc $F \cap G \neq \{0\}$, donc $F \cap G$ contient un vecteur, i.e. F et G ont un vecteur en commun.

3 Applications linéaires en dimension finie

3.1 Aspects pratiques

Exercice 13. ●○○ Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3 \ , u(e_2) = 3e_2 \ , u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Determiner une base de $\ker(u)$.

Correction

Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 4x_3 = 0 \\ 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \\ x_1 = -2\alpha \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Donc $\ker(u) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?

Correction

u n'est pas injectif car son noyau n'est pas réduit à 0. Il ne peut être surjectif car c'est un endomorphisme, et qu'un endomorphisme est injectif ssi il est surjectif ssi il est bijectif.

2. Determiner une base de $\mathrm{Im}(u)$. Quel est le rang de u ?

Correction

On sait que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(-2e_1 + 2e_3, 3e_2, -4e_1 + 4e_3)$.

3. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 14. ●○○ On considère l'application lineaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Determiner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Correction

On sait que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

On remarque que $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2)\right)$, de dimension 2 car e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires.

 nlaillet.math@gmail.com

2. Determiner une base de $\ker(f)$.

Correction

On résout $f(x, y, z) = 0$ d'inconnues x, y et z, i.e. $\begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$ On pourrait résoudre ce système mais on remarque que, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = 3-1 = 2$, donc il suffit de trouver un vecteur non nul du noyau pour en avoir une base. Or, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est solution du système. Donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Correction

On en déduit que l'application n'est ni injective, ni surjective !

3.2 Exemples avec des polynômes

Exercice 15. ●◐○ On définit sur $E = \mathbb{R}_3[X]$,l'application

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.

Correction

Soit P dans $\mathbb{R}_3[X]$. Alors $\deg(u(P)) \leqslant \max(\deg(P), \deg((1-X)P')) = 3$. Donc $u(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.
Ensuite, soient P et Q dans $\mathbb{R}_3[X]$, λ et μ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q) + (1 - X)(\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda P + \mu Q + (1 - X)(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda(P + (1 - X)P') + \mu(Q + (1 - X)Q') = \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

2. Déterminer une base de $\ker(u)$.

Correction

Soit P dans $\mathbb{R}_3[X]$, $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Alors

$$\begin{aligned} u(P) &= aX^3 + bX^2 + cX + d + (1 - X)(3aX^2 + 2bX + c) \\ &= aX^3 + bX^2 + cX + d + 3aX^2 + 2bX + c - 3aX^3 - 2bX^2 - cX \\ &= -2aX^3 + (3a - b)X^2 + 2bX + d + c. \end{aligned}$$

Donc
$$u(P) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \text{ et } d = -c.$$
Donc $\ker(u) = \{c(X-1),\ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X-1)$.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.

Correction

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(u) &= \mathrm{Vect}(u(1), u(X), u(X^2), u(X^3))\\ &= \mathrm{Vect}(1, 1, -X^2+X, -2X^3+3X^2)\\ &= \mathrm{Vect}(1, -X^2+X, -2X^3+3X^2).\end{aligned}$$

Comme, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 4-1 = 3$ et que $(1, -X^2+X, -2X^3+3X^2)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$ de cardinal 3, c'en est une base.

4. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Correction

On concatène les bases trouvées de $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$: $(1, X-1, -X^2+X, -2X^3+3X^2)$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés, donc libre, de cardinal 4 dans $\mathbb{R}_3[X]$, donc la famille est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 16. ●●○ Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient A, B deux polynômes de degré $n+1$. On définit l'application $\phi : E \to E$ qui à un polynôme P associe le reste de AP dans la division euclidienne par B.

1. Démontrer que ϕ est linéaire.

Correction

Soient P et Q deux polynômes, λ et μ deux réels. Soient (U, R) le quotient et le reste de la division euclidienne de AP par B et (V, S) le quotient et le reste de la division euclidienne de AQ par B. Alors $AP = UB + R$ et $AQ = VB + S$ avec $\deg(R) < \deg(B)$ et $\deg(S) < \deg(B)$. Donc

$$A(\lambda P + \mu Q) = (\lambda U + \mu V)B + \lambda R + \mu S,$$

et $\deg(\lambda R + \mu S) \leqslant \max(\deg(R), \deg(S)) < \deg(B)$. Donc, par unicité du reste dans la division euclidienne, $\lambda\phi(P) + \mu\phi(Q) = \lambda R + \mu S = \phi(\lambda P + \mu Q)$. D'où la linéarité de ϕ.

2. Démontrer que ϕ est bijective si et seulement si A et B sont premiers entre eux.

Correction

Supposons A et B premiers entre eux.
Comme ϕ est un endomorphisme, il suffit donc d'étudier son injectivité. Soit P un élément

de $\ker(\phi)$. Alors $\phi(P) = 0$, i.e. B divise AP. Donc, par le théorème de Gauss, B divise P. Or $\deg(P) \leqslant n < \deg(B)$. Donc nécessairement P est nul. Donc ϕ est injective, donc bijective.
Supposons que A et B ne sont pas premiers entre eux. Soit U un diviseur commun non constant de A et B, posons $A = UA_1$ et $B = UB_1$. Alors $\deg(B_1) < \deg(B)$ donc $B_1 \in E$ et $AB_1 = A_1UB_1 = A_1B$ donc $\phi(B_1) = 0$, avec $B_1 \neq 0$. Donc ϕ n'est pas injective, donc pas bijective.

Exercice 17. *Interpolation d'Hermite*. ●●○ Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, $x_0, \dots x_n$ $n+1$ points de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ f(x_k) = P(x_k) \text{ et } f'(x_k) = P'(x_k).$$

On considèrera pour cela une application linéaire judicieusement choisie.

Correction

Montrons que l'application

$$\Psi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{2n+1}[X] \to \mathbb{R}^{2n} \\ \qquad P \mapsto (P(a_0), P'(a_0), P(a_1), P'(a_1), \dots, P(a_n), P'(a_n)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- Déjà Ψ est linéaire par linéarité de la dérivation.
- Ensuite, $\dim(\mathbb{R}_{2n+1}[X]) = \dim(\mathbb{R}^{2n+2})$.
- Enfin, montrons que Ψ est injective. Soit P dans $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que $P(a_0) = P'(a_0) = P(a_1) = P'(a_1) = \dots = P(a_n) = P'(a_n) = 0$. Alors $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont $n+1$ racines de multiplicité au moins 2. Donc P a au moins $2(n+1) = 2n+2$ racines comptées avec multiplicité, et est de degré $2n+1$. Donc $P = 0$. D'où le résultat.

3.3 Généralités

Exercice 18. ●○○ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.

1. Établir $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f$ et $\ker f^2 = \ker f$.

Correction

- **Image.**
  — Montrons que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$. Soit y dans $\mathrm{Im}(f^2)$. Alors on dispose de x dans E tel que $y = f^2(x) = f(f(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}(f)$.
  — Ensuite, $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(f^2)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$.
- **Image.**
  — Montrons que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. Soit x dans $\ker(f)$. Alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \ker(f^2$.

— Ensuite, $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$ donc, par le théorème du rang,

$$\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f^2) = \dim(\ker(f^2)),$$

Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit que $\ker(f^2) = \ker(f)$.

2. Montrer que $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.

Correction

Par le théorème du rang, on sait que $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$. Il suffit alors de démontrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.
Soit x dans $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$. Alors on dispose de a dans E tel que $x = f(a)$. Or, $f(x) = 0$ donc $f^2(a) = 0$, donc $a \in \ker(f^2)$ donc $a \in \ker(f)$. Donc $f(a) = 0$, i.e. $x = 0$. Donc $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$, donc $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 19. ●◐○ Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-evdf E. Démontrer que

$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

Exercice 20. *Imposer les noyaux*. ●◐○

1. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

Correction

Le noyrau que l'on veut imposer est $\mathrm{Vect}(1, 1, 1, 1)$. Il est donc de dimension 1. Si on avait $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\ker(u) = \mathrm{Vect}(1, 1, 1, 1)$, alors on aurait $\mathrm{rg}(u) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = 4 - 1 = 3$, ce qui est impossible puisque u est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Donc il n'existe pas d'application u telle que $\ker(u) = \mathrm{Vect}(1, 1, 1, 1)$.

2. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est E.

Correction

Là, en revanche, pas de problème de dimension. On veut imposer $\ker(u)$ de dimension 2, donc il suffit de trouver une application u de rang 1. On remarque que u et v sont tous deux dans le plan d'équation $y - z = 0$. Si l'on définit alors

$$u(x, y, z) = (y - z)(1, 1, 1),$$

alors on a bien une application linéaire dont le noyau est le plan souhaité.

Exercice 21. *Raisonnements sur la dimension*. ●●◐

1. Soientt $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$, où E est un evdf. Montrer que

$$\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) - \dim(\mathrm{Im}(g \circ f)).$$

Correction

Soit $u : \left| \begin{array}{l} \mathrm{Im}(f) \to G \\ \quad x \mapsto g(x) \end{array} \right.$ Alors $\mathrm{Im}(u) = u(\mathrm{Im}(f)) = g(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Im}(g \circ f)$. De même, si $x \in E$ $x \in \ker(u)$ si et seulement si $x \in \mathrm{Im}(f)$ et $x \in \ker(g)$ donc $\ker(u) = \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$. Donc, en appliquant le théorème du rang à u, $\mathrm{rg}(u)+\dim(\ker(u)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$, donc

$$\dim(\mathrm{Im}(f \circ g)) + \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \ker(u)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

2. Soient f et g deux endomorphismes d'un evdf E. On suppose que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \ker(f) + \ker(g)$. Montrer que ces deux sommes sont directes.

Correction

On sait, par le théorème du rang, que

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E), \dim(\mathrm{Im}(g)) + \dim(\ker(g)) = \dim(E),$$

Comme $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$, $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) \geqslant \dim(E)$ et, de même, $\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) \geqslant \dim(E)$, donc

$$2\dim(E) \leqslant dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) + \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) = 2\dim(E).$$

Donc on a égalité dans toutes les inégalités, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(E)$ et $\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) = \dim(E)$. D'où, par égalité des dimensions, les espaces sont supplémentaires, donc les sommes sont directes.

Exercice 22. *Autour des suites exactes.* ●●○ Soient $E_0, \dots, E_n$ des espaces vectoriels de dimensions finies respectivement egales à $a_0, \dots, a_n$. On suppose qu'il existe n applications lineaires $f_0, \dots, f_{n-1}$ telles que, pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$, f_k est une application lineaire de E_k dans E_{k+1} et

1. f_0 est injective ;
2. $\ker(f_k) = \mathrm{Im}(f_{k-1})$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$;
3. f_{n-1} est surjective.

Prouver que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = 0$.

Correction

On applique le théorème du rang :

- f_0 est injective donc $\mathrm{rg}(f_0) = a_0$.
- Ensuite, pour tout k,

$$a_k = \dim(\ker(f_k)) + \mathrm{rg}(f_k) = \mathrm{rg}(f_{k-1}) + \mathrm{rg}(f_k)$$

- Enfin, $\mathrm{rg}(f_{n-1}) = a_n$.

Donc
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = \mathrm{rg}(f_0) + \sum_{k=1}^{n-1}(\mathrm{rg}(f_{k-1}) + \mathrm{rg}(f_k)) + \mathrm{rg}(f_{n-1}) = 0,$$
par télescopage.

Exercice 23. ●●○ Un endomorphisme f de $\mathscr{L}(E)$ est dit *ponctuellement nilpotent* si

$$\forall x \in E,\ \exists k \in \mathbb{N},\ f^k(x) = 0.$$

(i) Montrer que **si** E **est de dimension finie**, un endomorphisme ponctuellement nilpotent de E est nilpotent.

Correction

Soit f un endomorphisme ponctuellement nilpotent. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, soient $k_1, \dots, k_n$ n entiers tels que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $f^{k_i}(e_i) = 0$. Posons $k = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} k_i$. Soit $x \in E$, $(x_1, \dots, x_n)$ n réels tels que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Alors

$$f^k(x) = f^k\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f^k(e_i) = 0.$$

Donc $f^k = 0$, donc f est nilpotente.

(ii) Montrer que le résultat est faux si l'on ne suppose plus E de dimension finie (on exhibera un contre-exemple dans $\mathbb{K}[X]$).

Correction

Soit D l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$. Alors si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré d, $D^{d+1}(P) = 0$. Mais D n'est pas nilpotent. Si c'était le cas, on aurait $k \in \mathbb{N}$ tel que $D^k = 0$. Mais $D^k(X^k) = k! \neq 0$.

3.4 Formes linéaires et hyperplans

Exercice 24. *Extrait E3A PSI 2015*. ●◐○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$.

1. Justifier que l'ensemble des endomorphismes inversibles de E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Correction

L'endomorphisme nul n'est pas inversible, donc il n'appartient pas à $GL(E)$.

2. Rappeler la définition d'un hyperplan de E.

Correction

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Soit H un hyperplan de E et G son complémentaire dans E.
Répondre en le démontrant si les assertions suivantes sont vraies ou fausses

(1) G est un sous-espace supplémentaire de H.

Correction

FAUX. G ne contient pas 0 donc G n'est pas un sous-espac vectoriel de E, donc il ne peut pas être un supplémentaire de H.

(2) Pour tout vecteur a de G, $\mathrm{Vect}(a)$ est supplémentaire de H dans E.

Correction

VRAI. (question de cours)

(3) Le noyau de l'application Tr est un hyperplan de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

Correction

VRAI. La trace est une forme linéaire non nulle de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, donc son noyau est un hyperplan.

(4) Un endomorphisme de E est de rang 1 si et seulement si son noyau est un hyperplan de E.

Correction

VRAI.

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(u) = 1 &\Leftrightarrow \dim(E) - \mathrm{rg}(u) = \dim(E) - 1 \\ &\Leftrightarrow \dim(\ker(u)) \underset{\text{th. du rang}}{=} \dim(E) - 1 \Leftrightarrow \ker(u) \text{ est un hyperplan de } E,\end{aligned}$$

car, en dimension finie, les hyperplans sont exactement les sous-espaces vectoriels de dimension $\dim(E) - 1$.

Exercice 25. ●●◐ Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice M.

1. Vérifier que $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Correction

Vérifier qu'il s'agit d'une forme linéaire a été fait dans le cours sur les matrices, pareil pour $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$.

(i) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, avec $i \neq j$. Calculer $\varphi(E_{i,j})$.

Correction

Remarquons que si $k \in [\![1, n]\!]$, $E_{ij} = E_{ik}E_{kj}$. Donc

$$\varphi(E_{ij}) = \varphi(E_{ik}E_{kj}) = \varphi(E_{kj}E_{ik}) = \varphi(\delta_{ji}E_{kk}) = \varphi(0) = 0.$$

(ii) Comparer $\varphi(E_{i,i})$ et $\varphi(E_{j,j})$ pout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

Correction

Remarquons que pour tous i et j, $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{ij}E_{ji}) = \varphi(E_{ji}E_{ij}) = \varphi(E_{jj})$.

(iii) En déduire que $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(M) = \lambda \mathrm{Tr}(M)$.

Correction

Posons λ la valeur commune des E_{jj}. Alors φ coïncide avec $\lambda\mathrm{Tr}$ sur tous les $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ donc sur les vecteurs d'une base, donc $\varphi = \lambda\mathrm{Tr}$

3. Soit $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices de la forme $AB - BA$ avec A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\mathcal{H} = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$. Démontrer que $\dim(\mathcal{T}) = n^2 - 1$, en déduire que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T} \oplus \mathcal{H}$.

Correction

(question pas forcément facile) Déterminons une famille libre de $\mathcal{T}$. Remarquons que si $i \neq j$, alors $E_{ij} = E_{ii}E_{ij} - E_{ij}E_{ii}$, donc si $i \neq j$, $E_{ij} \in \mathcal{T}$. Ensuite, remarquons que pour tous $i \neq 1$, $E_{1i}E_{i1} - E_{i1}E_{1i} \in \mathcal{T}$, donc $F_i = E_{11} - E_{ii} \in \mathcal{T}$. De plus, la famille $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} \cup (E_{11} - E_{ii})_{2\leqslant i\leqslant n}$ est libre, donc $\mathcal{T}$ est de dimension au moins $n^2 - 1$. Il est différent de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ car toute matrice de $\mathcal{T}$ est de trace nulle, ce qui n'est pas le cas de toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Ensuite, $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(I_n)$ et $I_n \notin \mathcal{T}$, donc $\mathcal{T} \oplus \mathcal{H} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on pose $F_{i,j} = I_n + E_{i,j}$. Calculer pour $(i, j, h, k) \in [\![1, n]\!]^4$, $h \neq k$, le produit matriciel $F_{h,k}^{-1}F_{i,j}F_{h,k}$.

Correction

Déjà remarquons que l'inverse de $F_{hk} = I_n + E_{hk}$ est, si $h \neq k$, $I_n - E_{hk}$: en effet,

$$(I_n + E_{hk})(I_n - E_{hk}) = I_n + E_{hk} - E_{hk} - E_{hk}E_{hk} = I_n.$$

De même pour l'autre produit. On a donc

$$\begin{aligned}
F_{hk}^{-1}F_{ij}F_{hk} &= (I_n - E_{hk})(I_n + E_{ij})(I_n + E_{hk}) \\
&= (I_n - E_{hk})(I_n + E_{ij} + E_{hk} + E_{ij}E_{hk}) \\
&= I_n + E_{ij} + E_{hk} + E_{ij}E_{hk} - E_{hk} - E_{hk}E_{ij} - E_{hk}^2 - E_{hk}E_{ij}E_{hk} \\
&= I_n + E_{ij} + E_{ij}E_{hk} - E_{hk}E_{ij} - E_{hk}E_{ij}E_{hk} \\
&= F_{ij} + E_{ij} + E_{ij}E_{hk} - E_{hk}E_{ij} - E_{hk}E_{ij}E_{hk}.
\end{aligned}$$

- si $i \neq k$ et $j \neq h$, $E_{ij}E_{hk} - E_{hk}E_{ij} + E_{hk}E_{ij}E_{hk} = 0$
- si $i = k$ et $j \neq h$, $E_{ij}E_{hk} - E_{hk}E_{ij} + E_{hk}E_{ij}E_{hk} = 0 - E_{hj}$
- si $i \neq k$ et $j = h$, $E_{ij}E_{hk} - E_{hk}E_{ij} - E_{hk}E_{ij}E_{hk} = E_{ik}$
- si $i = k$ et $j = h$, $E_{ij}E_{hk} - E_{hk}E_{ij} - E_{hk}E_{ij}E_{hk} = E_{ik} - E_{hj} - E_{hk} = E_{ii} - E_{jj} - E_{ji}$.

5. Soit ψ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \forall B \in GL_n(\mathbb{K}),\ \psi(AB) = \psi(BA)$. Démontrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \psi(M) = \lambda \mathrm{Tr}(M)$.

Correction

Soit φ une telle application linéaire. Alors si (i, j, h) sont trois entiers, avec $j \neq h$, on a $F_{hk}^{-1}F_{ij}F_{hk} = F_{ij} - E_{hj}$. De plus, comme F_{hk}^{-1} est inversible,

$$\varphi(F_{hk}^{-1}F_{ij}F_{hk}) = \varphi(F_{ij}F_{hk}F_{hk}^{-1}) = \varphi(F_{ij}),$$

donc

$$\varphi(F_{ij}) = \varphi(F_{ij} - E_{hj}) = \varphi(F_{ij}) - \varphi(E_{hj}),$$

donc $\varphi(E_{hj}) = 0$.
Si maintenant $i \neq j$,

$$F_{ji}^{-1}F_{ij}F_{ji} = F_{ij} + E_{ij} + E_{ii} - E_{jj} - E_{ji}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\varphi(F_{ji}^{-1}F_{ij}F_{ji}) &= \varphi(F_{ij} + E_{ij} + E_{ii} - E_{jj} - E_{ji}) = \varphi(F_{ij}) + \varphi(E_{ij}) + \varphi(E_{ii}) - \varphi(E_{jj}) - \varphi(E_{ji}) \\
&= \varphi(F_{ij}) + \varphi(E_{ii}) - \varphi(E_{jj}).
\end{aligned}$$

Or, F_{ji}^{-1} est inversible donc $\varphi(F_{ji}^{-1}F_{ij}F_{ji}) = \varphi(F_{ij}F_{ji}F_{ji}^{-1}) = \varphi(F_{ij})$, donc $\varphi(F_{ij}) + \varphi(E_{ii}) - \varphi(E_{jj}) = \varphi(F_{ij})$ donc $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$.
Donc si $i \neq j$ $\varphi(E_{ij}) = 0$ et $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$, donc φ est un multiple de la trace.

Indications.

1 **1.** Déterminer une base de F en résolvant un système.
2. Vérifier que chaque vecteur qui engendre G satisfait les équations de F.
3. Utiliser des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

2 **1.** Utiliser un résultat sur le fait que la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est presque jamais un sous-espace vectoriel.

2. Faire une récurrence descendante sur la dimension : partir de $n-1$, aller à $n-2$, etc...

3 **1.** Pour la liberté, penser à un DM déjà fait... et en déduire directement que l'on a une base !

2. Utiliser qu'entre deux espaces de même dimension, être injective équivaut à être surjective qui équivaut à être bijective.

3. Démontrer la liberté de $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$, puis rappeler la dimension de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Pour l'application, reconnaître les formes linéaires !

4 **1.** Déjà fait avec les matrices nilpotentes !

2. Utiliser une partie de $\mathbb{N}$ non vide.

3. (a)

(b) Prendre un élément de N_k, montrer qu'il est dans N_{k+1}.

(c) Utiliser le fait que si $x \in \mathbb{N}_{\ell+1}$, alors $u^{\ell-k}(x) \in N_{k+1}$. (justifier)

(d) Démontrer que $u^n = 0$.

5 Utiliser le fait que $\ker(f) \cup \ker(g)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

6 **1.** Résoudre les sytèmes d'équations associés.

2. Combiner les deux équations de F et G.

3. Concaténer les bases de F et de G trouvées.

4. Que vaut $F \cap G$? Conclure.

7 **1.** Résoudre le système d'équations associé.

2. Prendre des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

3. Résoudre un système linéaire.

4. Si la famille est libre, on connait la dimension de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Sinon, on a une inégalité stricte sur la dimension. On vérifiera qu'une équation de G est $x - y - z + t = 0$.

5. Rassembler les équations trouvées.

6. Comme G est un hyperplan, trouver un vecteur de F qui n'est pas dans G !

7. La somme $F + G$ est-elle directe ?

8 Résoudre un système linéaire pour la liberté et prendre un vecteur de la base canonique.

9 Démontrer que la famille est libre et utiliser un argument de dimension. Pour la liberté, s'intéresser à la multiplicité des racines.

10 Considérer la famille $\mathrm{I}_n, M, M^2, \dots, M^p$ avec p un entier bien choisi, et montrer qu'elle est liée.

11 Penser que l'on peut faire des opérations élémentaires sur les éléments engendrant un sev.

12 Utiliser la formule de Grassmann.

13 **1.** Résoudre un système linéaire, puis utiliser le théorème du rang.

2. Résoudre aussi un système linéaire.

3. La réponse bient directement des deux réponses précédentes.

14 Idem que l'exercice précédent.

15 **1.** Question déjà faite.

2. Résoudre en écrivant $P \in \ker(u)$ sous la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d$.

3. Utiliser le théorème du rang et vérifier qu'il suffit de trouver un vecteur de l'image.

4. Concaténer les bases trouvées.

16 **1.** Programme du chapitre précédent : utiliser l'unicité du reste de la division euclidienne.

2. Utiliser l'injectivité, et des théorèmes d'arithmétique (Gauss notamment !)

17 Considérer

$$\Psi : \left| \begin{array}{r} \mathbb{R}_{2n+1}[X] \to \mathbb{R}^{2n} \\ P \mapsto (P(a_0), P'(a_0), P(a_1), P'(a_1), \dots, P(a_n), P'(a_n)) \end{array} \right.$$

, et démontrer qu'elle est injective, donc bijective.

18 **1.** Faire une inclusion et utiliser l'égalité des dimensions.

2. Faire de même.

3. Démontrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$ puis utiliser le théorème du rang.

19 — Commencer par la deuxième inégalité, en montrant que $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$, et utiliser la formule de Grassmann.

— Penser à la méthode que l'on a vue pour démontrer que $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'|$.

20 **1.** Démontrer que ce n'est pas possible par un argument de dimension.

2. C'est possible : construire une telle application.

21 **1.** Poser $u : \left| \begin{array}{r} \mathrm{Im}(f) \to G \\ x \mapsto g(x) \end{array} \right.$, et appliquer à cette application le théorème du rang !

2. Utiliser deux théorèmes du rang.

22 Appliquer plusieurs théorèmes du rang à la suite.

23 **1.** Utiliser une base de l'espace vectoriel.

2. Penser à la dérivation chez les polynômes.

24 Révisions de cours.

25 **1.** Fait en cours.

2. Fait en DS !

3. Déterminer une famille libre de $\mathcal{T}$ de cardinal $n^2 - 1$.

4. Calcul brut, bien connaître ses produits de matrices élémentaires.

5.