TD 19
Espaces vectoriels de dimension finie

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :
$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$,
$G = \mathrm{vect}\{(1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5)\} \subset \mathbb{R}^4$.

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que $G \subset F$ et conclure que $G = F$.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $n-1$. A-t-on $F \cup G = E$? Démontrer que F et G ont un supplémentaire commun.
2. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $p < n$. Montrer que F et G ont un supplementaire commun, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cet exercice, on illustre la notion de dimension dans $\mathbb{K}_n[X]$.

1. Démontrer que $(X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$
2. Soit n dans $\mathbb{N}$. Démontrer que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), \ldots, P(n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-evdf, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ les formes linéaires coordonnées associées. Démontrer que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
   Application. Démontrer qu'il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$,
   $$\int_0^1 P(t)dt = \lambda_0 P(0) + \lambda_1 P\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \lambda_{n-1} P\left(\frac{n-1}{n}\right) + \lambda_n P(1).$$

Exercice 4. *Endomorphismes nilpotents*. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $u \in \mathscr{L}(E)$. u est dit *nilpotent* s'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$, où $u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

1. Soit u un endomorphisme nilpotent. En utilisant la formule du binôme de Newton ou de Bernoulli montrer que $\mathrm{Id} - u$ est inversible.
2. Justifier qu'il existe un plus petit entier p tel que $u^p = 0$. Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de u.
3. On veut montrer que $p \leqslant n$ (où p est l'indice de nilpotence de u). Pour ce faire, on définit, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $N_k = \ker(u^k)$. Montrer que pour tout entier k, $N_k \subset N_{k+1}$ et que s'il existe k_0 tel que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$, alors pour tout $\ell \geqslant k_0$, $N_\ell = N_{\ell+1}$. Conclure.
4. Retrouver le même résultat en démontrant que si x est un vecteur de E qui n'est pas dans $\ker(u^{p-1})$, alors $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre.

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux formes linéaires non nulles sur E. Montrer
$$\exists x \in E, f(x)g(x) \neq 0$$

Stratégie. Pour ce TD encore davantage que pour les autres, **ciblez vos besoins.** Je vous conseille de jauger votre niveau de compréhension de l'algèbre linéaire en dimension finie.

- si vous avez des difficultés en algèbre linéaire, lancez-vous sur des exercices **pratiques**, qui font appliquer petit à petit les théorèmes de cours : 6, 7, 13 et 14.
- ensuite, familiarisez-vous avec d'autres exemples : des polynômes (8, 9, 15, 16, 17) ou des matrices (10).
- enfin, n'hésitez pas à faire des exercices théoriques, c'est-à-dire les exercices 11, 12, puis des exercices théoriques sur les applications linéaires : 18, 20, 21, 22, 23.
- les exercices sur les formes linéaires sont un peu plus rares, mais faites quand même l'exercice 24.

Mon best of. Ce sont les exercices que je considère parmi les plus importants. Mais ne grillez pas d'étape et familiarisez-vous bien avec les notions ! Ce sont les exercices 9, 10, 12, 17, 18, 21, 23, 24. Dans ce best-of, je n'ai pas mis les exercices de base. **Encore une fois, je me répète, mais maîtrisez les bases avant de vous lancer dans ces exercices !**

2 Espaces vectoriels de dimension finie

2.1 Aspects pratiques

Exercice 6. ◐○○ Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y + z = 0\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y + 2z = 0\}. \end{aligned}$$

1. Donner une base de F, une base de G, en déduire leurs dimensions respectives.
2. Donner une base de $F \cap G$, et donner sa dimension.
3. Déterminer $F + G$.
4. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 7. ◐○○ On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Donner une base de F.
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3,4)$ et $u_3 = (-1,0,-1,0)$. La famille (u_1,u_2,u_3) est-elle libre ?
4. On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3. Quelle est la dimension de G ? Donner une équation de G.
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

2.2 Bases et dimension finie

Exercice 8. ●○○ Montrer que la famille $(X^3 - 2X + 1, X^3 + 2X, X^2 - 1)$ est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$, et la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 9. ●◐○ Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, on définit

$$B_k(X) = X^k(1 - X)^{n-k}.$$

Montrer que $(B_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 10. ●●○ Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un polynôme non nul P dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(M) = 0$.
(on rappelle que si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$, et si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P(M) = a_0\mathrm{I}_n + a_1M + a_2M^2 + \cdots + a_dM^d$).

2.3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Exercice 11. ●○○ Soit E un evdf, soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ $2n$ vecteurs de E tels que la famille $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ est libre. Montrer que $\mathrm{rg}(x_1 \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \geqslant n$.

Exercice 12. ●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$. Montrer que F et G admettent au moins un vecteur non nul en commun.

3 Applications linéaires en dimension finie

3.1 Aspects pratiques

Exercice 13. ●○○ Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3 \ , u(e_2) = 3e_2 \ , u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Determiner une base de $\ker(u)$. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?

2. Determiner une base de $\mathrm{Im}(u)$. Quel est le rang de u ?

3. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 14. ●○○ On considère l'application lineaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Determiner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. Determiner une base de $\ker(f)$.

3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

3.2 Exemples avec des polynômes

Exercice 15. ●◐○ On définit sur $E = \mathbb{R}_3[X]$,l'application

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.

2. Déterminer une base de $\ker(u)$.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.

4. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 16. ●●○ Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient A, B deux polynômes de degré $n+1$. On définit l'application $\phi : E \to E$ qui à un polynôme P associe le reste de AP dans la division euclidienne par B.

1. Démontrer que ϕ est linéaire.

2. Démontrer que ϕ est bijective si et seulement si A et B sont premiers entre eux.

Exercice 17. *Interpolation d'Hermite*. ●●○ Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, $x_0, \dots x_n$ $n+1$ points de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ f(x_k) = P(x_k) \text{ et } f'(x_k) = P'(x_k).$$

On considèrera pour cela une application linéaire judicieusement choisie.

3.3 Généralités

Exercice 18. ●○○ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.

1. Établir $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f$ et $\ker f^2 = \ker f$.

2. Montrer que $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 19. ●◐○ Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-evdf E. Démontrer que

$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

Exercice 20. *Imposer les noyaux*. ●◐○

1. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

2. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est E.

Exercice 21. *Raisonnements sur la dimension*. ●●◐

1. Soientt $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$, où E est un evdf. Montrer que

$$\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) - \dim(\mathrm{Im}(g \circ f)).$$

2. Soient f et g deux endomorphismes d'un evdf E. On suppose que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \ker(f) + \ker(g)$. Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 22. *Autour des suites exactes*. ●●○ Soient $E_0, \dots, E_n$ des espaces vectoriels de dimensions finies respectivement egales à $a_0, \dots, a_n$. On suppose qu'il existe n applications lineaires $f_0, \dots, f_{n-1}$ telles que, pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$, f_k est une application lineaire de E_k dans E_{k+1} et

1. f_0 est injective ;

2. $\ker(f_k) = \mathrm{Im}(f_{k-1})$ pour tout $k = 1, \ldots, n-1$;

3. f_{n-1} est surjective.

Prouver que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = 0$.

Exercice 23. ●●○ Un endomorphisme f de $\mathscr{L}(E)$ est dit *ponctuellement nilpotent* si

$$\forall x \in E,\ \exists k \in \mathbb{N},\ f^k(x) = 0.$$

(i) Montrer que **si** E **est de dimension finie**, un endomorphisme ponctuellement nilpotent de E est nilpotent.

(ii) Montrer que le résultat est faux si l'on ne suppose plus E de dimension finie (on exhibera un contre-exemple dans $\mathbb{K}[X]$).

3.4 Formes linéaires et hyperplans

Exercice 24. *Extrait E3A PSI 2015*. ●◐○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$.

1. Justifier que l'ensemble des endomorphismes inversibles de E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

2. Rappeler la définition d'un hyperplan de E.
Soit H un hyperplan de E et G son complémentaire dans E.
Répondre en le démontrant si les assertions suivantes sont vraies ou fausses

(1) G est un sous-espace supplémentaire de H.

(2) Pour tout vecteur a de G, $\mathrm{Vect}(a)$ est supplémentaire de H dans E.

(3) Le noyau de l'application Tr est un hyperplan de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

(4) Un endomorphisme de E est de rang 1 si et seulement si son noyau est un hyperplan de E.

Exercice 25. ●●◐ Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice M.

1. Vérifier que $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$.

(i) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, avec $i \neq j$. Calculer $\varphi(E_{i,j})$.

(ii) Comparer $\varphi(E_{i,i})$ et $\varphi(E_{j,j})$ pout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

(iii) En déduire que $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(M) = \lambda \mathrm{Tr}(M)$.

3. Soit $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices de la forme $AB - BA$ avec A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\mathcal{H} = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$. Démontrer que $\dim(\mathcal{T}) = n^2 - 1$, en déduire que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T} \oplus \mathcal{H}$.

4. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on pose $F_{i,j} = I_n + E_{i,j}$. Calculer pour $(i, j, h, k) \in [\![1, n]\!]^4$, $h \neq k$, le produit matriciel $F_{h,k}^{-1} F_{i,j} F_{h,k}$.

5. Soit ψ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \forall B \in GL_n(\mathbb{K}),\ \psi(AB) = \psi(BA)$.
Démontrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \psi(M) = \lambda \mathrm{Tr}(M)$.

Indications.

1
 1. Déterminer une base de F en résolvant un système.
 2. Vérifier que chaque vecteur qui engendre G satisfait les équations de F.
 3. Utiliser des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

2
 1. Utiliser un résultat sur le fait que la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est presque jamais un sous-espace vectoriel.
 2. Faire une récurrence descendante sur la dimension : partir de $n-1$, aller à $n-2$, etc...

3
 1. Pour la liberté, penser à un DM déjà fait... et en déduire directement que l'on a une base !
 2. Utiliser qu'entre deux espaces de même dimension, être injective équivaut à être surjective qui équivaut à être bijective.
 3. Démontrer la liberté de $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$, puis rappeler la dimension de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Pour l'application, reconnaître les formes linéaires !

4
 1. Déjà fait avec les matrices nilpotentes !
 2. Utiliser une partie de $\mathbb{N}$ non vide.
 3. (a)
 (b) Prendre un élément de N_k, montrer qu'il est dans N_{k+1}.
 (c) Utiliser le fait que si $x \in \mathbb{N}_{\ell+1}$, alors $u^{\ell-k}(x) \in N_{k+1}$. (justifier)
 (d) Démontrer que $u^n = 0$.

5 Utiliser le fait que $\ker(f) \cup \ker(g)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

6
 1. Résoudre les sytèmes d'équations associés.
 2. Combiner les deux équations de F et G.
 3. Concaténer les bases de F et de G trouvées.
 4. Que vaut $F \cap G$? Conclure.

7
 1. Résoudre le système d'équations associé.
 2. Prendre des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
 3. Résoudre un système linéaire.
 4. Si la famille est libre, on connait la dimension de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Sinon, on a une inégalité stricte sur la dimension. On vérifiera qu'une équation de G est $x - y - z + t = 0$.
 5. Rassembler les équations trouvées.
 6. Comme G est un hyperplan, trouver un vecteur de F qui n'est pas dans G !
 7. La somme $F + G$ est-elle directe ?

8 Résoudre un système linéaire pour la liberté et prendre un vecteur de la base canonique.

9 Démontrer que la famille est libre et utiliser un argument de dimension. Pour la liberté, s'intéresser à la multiplicité des racines.

10 Considérer la famille $\mathrm{I}_n, M, M^2, \dots, M^p$ avec p un entier bien choisi, et montrer qu'elle est liée.

11 Penser que l'on peut faire des opérations élémentaires sur les éléments engendrant un sev.

12 Utiliser la formule de Grassmann.

13 **1.** Résoudre un système linéaire, puis utiliser le théorème du rang.
2. Résoudre aussi un système linéaire.
3. La réponse bient directement des deux réponses précédentes.

14 Idem que l'exercice précédent.

15 **1.** Question déjà faite.
2. Résoudre en écrivant $P \in \ker(u)$ sous la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d$.
3. Utiliser le théorème du rang et vérifier qu'il suffit de trouver un vecteur de l'image.
4. Concaténer les bases trouvées.

16 **1.** Programme du chapitre précédent : utiliser l'unicité du reste de la division euclidienne.
2. Utiliser l'injectivité, et des théorèmes d'arithmétique (Gauss notamment !)

17 Considérer

$$\Psi : \left|\begin{array}{r} \mathbb{R}_{2n+1}[X] \to \mathbb{R}^{2n} \\ P \mapsto (P(a_0), P'(a_0), P(a_1), P'(a_1), \dots, P(a_n), P'(a_n)) \end{array}\right.$$

, et démontrer qu'elle est injective, donc bijective.

18 **1.** Faire une inclusion et utiliser l'égalité des dimensions.
2. Faire de même.
3. Démontrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$ puis utiliser le théorème du rang.

19 — Commencer par la deuxième inégalité, en montrant que $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$, et utiliser la formule de Grassmann.
— Penser à la méthode que l'on a vue pour démontrer que $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'|$.

20 **1.** Démontrer que ce n'est pas possible par un argument de dimension.
2. C'est possible : construire une telle application.

21 **1.** Poser $u : \left|\begin{array}{r} \mathrm{Im}(f) \to G \\ x \mapsto g(x) \end{array}\right.$, et appliquer à cette application le théorème du rang !
2. Utiliser deux théorèmes du rang.

22 Appliquer plusieurs théorèmes du rang à la suite.

23 **1.** Utiliser une base de l'espace vectoriel.
2. Penser à la dérivation chez les polynômes.

24 Révisions de cours.

25 **1.** Fait en cours.
2. Fait en DS !
3. Déterminer une famille libre de $\mathcal{T}$ de cardinal $n^2 - 1$.
4. Calcul brut, bien connaître ses produits de matrices élémentaires.
5.