

TD 21

Matrices et applications linéaires

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Endomorphismes cycliques.* ●●○ Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0$$

1. Justifier qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ forme une base de E .
2. Déterminer les matrices de f, f^2, \dots, f^{n-1} dans cette base.
3. Démontrer que $\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\} = \text{Vect}(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$

Exercice 2. *Sur l'opérateur de différence.* On considère l'opérateur de différence $\Delta : \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$.

1. Représenter la matrice de Δ dans la base canonique au départ et à l'arrivée, et en déduire que Δ est nilpotent.
2. Déterminer, par un raisonnement matriciel, l'image et le noyau de Δ .

On va démontrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme u de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $u^2 = \Delta$. On suppose qu'un tel u existe.

3. Démontrer que u stabilise $\mathbb{C}_1[X]$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Conclure.

Exercice 3. ●●○ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = I_n$. Démontrer que A et B sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

Exercice 4. *Couple de symétries qui anticommulent.* Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \text{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que la dimension de E est paire.
2. Montrer qu'il existe une base \mathcal{E} de E t.q. $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. ●●○

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $M = XY^T$.
2. Prouver que toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1, et donc qu'il existe $X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r$ $2r$ matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = \sum_{i=1}^r X_i Y_i^T$.
3. Soit E un \mathbb{K} -ev de df et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $f^2 = \text{Tr}(f)f$.
4. À quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

Exercice 6. *Endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.* ●●○

1. Déterminer la trace de l'application de transposition sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = MA$. Déterminer $\text{Tr}(\varphi)$.

Stratégie/exercices conseillés. En sus des exercices faits en cours, il faut à mon avis :

- parler de base adaptée (11 ou 14),
- faire un exercice avec une application linéaire sur les polynômes (8),
- faire un exercice un peu fin de changement de base (16),
- étudier au moins une fois un commutateur ($AB - BA$) : exercice 21.

Si vous avez du mal, concentrez-vous sur les exercices 13 et 7.

2 Matrice d'une application linéaire dans une base

Exercice 7. ●●○ Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ la matrice de l'endomorphisme $f : P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$. Déterminer le noyau et l'image de cette application linéaire.

Exercice 8. ●○○ Soit $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto (1+X)P' - \alpha P \end{cases}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f_\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (1, 1+X, (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer la matrice A_α de f_α dans la base précédente.
4. À quelle condition sur α l'endomorphisme f_α est-il inversible ?

Exercice 9. ●●○ Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^{-x}, f_2(x) = xe^{-x}.$$

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Montrer que $\varphi : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E .
3. Écrire la matrice représentative A de φ dans la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ de E .
4. Calculer A^n pour tout entier naturel n .
5. Soit $f : x \mapsto (3x+1)e^{-x}$. Calculer $f^{(n)}$ pour tout entier naturel n .
6. Montrer que tout élément f de E admet une unique primitive F élément de E et que $\psi : f \mapsto F$ est un endomorphisme de E .
7. (i) Déterminer la matrice B de ψ dans la base \mathcal{B} .
(ii) Quel lien y a-t-il entre A et B ?

Exercice 10. ●●○ Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. ●●○ Soit u un endomorphisme de E \mathbb{K} -evdf. Représenter $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ dans une base \mathcal{E} qui fasse apparaître le plus de zéros possible, lorsque...

1. $u^2 = 0$.

2. $\text{Im}(u) = \ker(u)$.
3. $\text{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.
4. $\ker(u)$ est un hyperplan de E .

Exercice 12. ●●○

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ tel que $u^2 = 0$ et $\text{rg}(u) = n$. Montrer que $\text{Ker } u = \text{Im } u$. En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{3n})$ tel que $u^3 = 0$ et $\text{rg}(u) = 2n$. Montrer que $\text{Ker } u = \text{Im } u^2$. En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

3 Matrices de passage – matrices semblables et équivalentes

Exercice 13. ●○○ Dans cet exercice on notera $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On considère l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par

$$f(x, y, z) = (2x - 2y + 2z, -x + y - 2z, -2x + 2y - 3z)$$

1. Donner la matrice A de f dans la base \mathcal{B} au départ et à l'arrivée.
2. Donner une base du noyau de f .
3. Donner une équation de l'image de f .
4. On considère les vecteurs $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_2 + e_3$ et $u_3 = -2e_1 + e_3$.
 - (i) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - (ii) Quelle est la matrice de passage P de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}' ?
5.
 - (i) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, et $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2, u_3 .
 - (ii) Quelle est la matrice $C = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ de f dans la base \mathcal{B}' ?
6. Calculer P^{-1} .

Exercice 14. ●○○

1. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.
2. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ non constante telle que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

Exercice 15. ●●○ Soit E un espace vectoriel de dimension n . On souhaite démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs. On fixe une base \mathcal{B} de E . On note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. À quelle condition une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle la matrice dans la base \mathcal{B} d'un projecteur de E ?
2. En déduire que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq j$, les matrices $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$ sont des matrices de projecteurs.
3. Démontrer la propriété annoncée.

Exercice 16. ●●●○

1. (question de quasi-cours) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

Exercice 17. ●●○ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = 3$, tel que $f^2 = 2f - \text{Id}$, $f \neq \text{Id}$.

1. Montrer que f est inversible et calculer f^{-1} .
2. Montrer que $\text{Im}(f - \text{Id}) \subset \ker(f - \text{Id})$.
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Calculer A^n .

Exercice 18. ●●○ Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ non constante égale à 0, non constante égale à 1 telle que pour toutes A et B , $f(AB) = f(A)f(B)$.

1. Déterminer $f(I_n)$ et $f(0)$.
2. Démontrer que si A est inversible, $f(A) \neq 0$.
3. Démontrer que si A n'est pas inversible, $f(A) = 0$.

4 Autres exercices

Exercice 19. ●○○ Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tous A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$. Montrer que $\varphi = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})}$.

Exercice 20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation

$$X + X^T = \text{Tr}(X)A$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 21. Sur l'application $AB - BA$. ●●○ On considère l'application Ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\Psi(A, B) = AB - BA.$$

1. I_n est-elle dans l'image de Ψ ?
2. Soit A tel qu'il existe B vérifiant $\Psi(A, B) = A$. Calculer $\text{Tr}(A^p)$ pour tout entier p .
3. Déterminer l'image de Ψ .

Exercice 22. ●●○

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer tous les endomorphismes de E tels que pour tout vecteur x la famille $(x, f(x))$ est liée. En déduire le centre de $\mathcal{L}(E)$ défini par

$$Z(\mathcal{L}(E)) = \{g \in \mathcal{L}(E); \forall f \in \mathcal{L}(E) \quad fg = gf\}$$

2. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A vérifiant $AM = MA$ pour toute matrice M .

3. Montrer que $T_{ij} = I_n + E_{ij}$ est inversible. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une base constituée de matrices inversibles.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant même matrice dans toutes les bases de E . Identifier f .
5. Quel est le centre de $GL_n(\mathbb{K})$?

Exercice 23. X MP 2014. ●●● Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est idempotente si $A^2 = A$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ idempotente. Montrer que $\text{Tr}(A) = \text{rg}(A)$.
2. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ de cardinal p . Soit $A = \sum_{M \in G} M$
 - (a) Vérifier que $\frac{A}{p}$ est idempotente.
 - (b) On suppose que $\text{Tr}(A) = 0$. Montrer que $A = 0$.
 - (c) Montrer que $\text{Tr}(A)$ est un entier divisible par p .
3. Soit $F = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall M \in G, Mx = x\}$.
 - (i) Montrer que F est un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension égale à $\text{Tr}(A)/p$.
 - (ii) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, expliciter un sous-groupe G de $GL_2(\mathbb{R})$ de cardinal p .

Indications.

1.
 1. Partir de x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$ et partir d'une relation de liaison entre $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$, à laquelle on applique suffisamment de fois f .
 2. Utiliser ou bien des produits matriciels, ou bien calculer $f^k(f^i(x_0))$.
 3. Utiliser le fait que $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E . On peut, si $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f , s'intéresser à déterminer la forme de la matrice de g dans cette base.
2.
 1. Remarquer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.
 2. Montrer d'abord des inclusions, puis des égalités (utiliser le théorème du rang).
 3. Utiliser que $\mathbb{C}_1[X] = \ker(\Delta^2)$.
 4. Prendre $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
 5. Utiliser $v : \begin{cases} \mathbb{C}_1[X] \rightarrow \mathbb{C}_1[X] \\ x \mapsto v(x) \end{cases}$.
- 3 Utiliser le fait que A et B sont des matrices de symétries, donc sont semblables à des matrices bien connues!
5.
 1. Utiliser le fait que M est équivalente à $J_{n,n,1}$, ou le fait que toutes les colonnes de M sont proportionnelles.
 2. Utiliser l'équivalence à $J_{n,n,r}$.
 3. Utiliser l'écriture matricielle!
 4. Utiliser le fait qu'on doit avoir $f^2 = f$.
6.
 1. Déterminer la matrice de l'application dans la base canonique ou dans une base adaptée à la décomposition $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
 2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique, bien ordonnée, i.e. dans $(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots)$

- 11 Utiliser des bases adaptées! Partir par exemple d'une base du noyau, que l'on complète en une base de E . Ou, si on a $F \subset G \subset E$, partir d'une base de F , complétée en une base de G , complétée en une base de E .
- 10 Partir de $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^2(x) \neq 0$ et montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de E .
- 7 Penser à utiliser la définition de l'écriture d'une matrice dans une base. Ensuite, pas nécessaire d'utiliser la matrice pour déterminer le noyau et l'image!
- 8
1. Ne pas oublier les deux parties du mot **endo-morphisme**.
 2. Remarquer qu'il s'agit d'une famille de polynômes à degrés échelonnés.
 3. On doit normalement trouver une famille diagonale.
 4. Penser au fait qu'une matrice diagonale est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
- 9
1. Démontrer que (f_1, f_2) est libre.
 2. Vérifier que $\varphi(f_1)$ et $\varphi(f_2)$ sont toujours dans E .
 3. Normalement les images de f_1 et f_2 par φ ont déjà été calculées.
 4. Calculer A^2, A^3 et faire une récurrence immédiate.
 5. Utiliser la représentation matricielle.
 6. Toute la difficulté réside dans la détermination de la constante de primitivation! Elle doit notamment aboutir à une application linéaire.
 7. (i) Normalement les calculs ont déjà été faits!
(ii)
- 13
1. Essayer de ne faire aucun calcul et utiliser l'expression de f .
 2. Résoudre un système homogène.
 3. Résoudre un système inhomogène.
 4. (i) Inverer la matrice de $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ dans la base canonique.
(ii) Si vous avez suivi les indications, c'est la matrice que vous venez d'inverser!
 5. (i)
(ii) Utiliser la question précédente!
 6. Elle a déjà été calculée à la question (i).
- 15
1. C'est du cours!
 2. Faire un simple calcul.
 3. Démontrer qu'on a trouvé ainsi une famille libre, donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et traduire ceci à l'aide de l'isomorphismes entre les applications linéaires et les matrices d'applications linéaires.
- 16
1. Revoir le dernier exo du premier chapitre d'algèbre linéaire.
 2. Faire une récurrence! En utilisant x tel que $(x, f(x))$ est libre, compléter cette famille en une base, et écrire la matrice de f dans cette base complétée. Elle doit commencer par un 0 en haut à gauche.
- 14
1. Utiliser le fait que deux matrices sont équivalentes **si et seulement si** elles ont même rang.

2. Montrer d'abord que $\varphi(A)$ est non nulle si A est inversible. Puis utiliser la question précédente.
- 17
 1. Écrire $f \circ (\text{ une expression en } f) = \text{Id}$.
 2. Déclarer proprement ses variables.
 3. Montrer que $f - \text{Id}$ est de rang 1, compléter $\text{Im}(f - \text{Id})$ en une base de $\ker(f - \text{Id})$.
 4. Calculer A^2 puis faire une récurrence immédiate.
- 18
 1. Élémentaire.
 2. Idem.
 3. Montrer que A est équivalente à une matrice nilpotente.
- 20 Raisonner par analyse-synthèse, prendre la trace et distinguer selon les valeurs de $\text{Tr}(A)$.
- 21
 1. Non !
 2. Utiliser que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
 3. Utiliser qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
- ?? Prendre un élément du noyau et supposer par l'absurde qu'il est non nul. Prendre alors sa coordonnée de plus grand module.
- 22
 1. On l'a déjà fait en classe !
 2. On l'a déjà fait en TD !
 3. Engendrer les E_{ij} avec les T_{ij}
 4. Montrer que f est une homothétie.
 5. Attention, toutes les homothéties ne sont pas inversibles.
- 23
 1. C'est du cours !
 2. (a) Utiliser que $M \mapsto NM$ est une bijection (encore !)
(b) Utiliser le fait que la trace d'un projecteur est son rang.
(c) Idem.
 3. (i) Utiliser le fait que A est un projecteur.
(ii) S'intéresser aux matrices $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.