 nlaillet.math@gmail.com

Semaine 03 – Colle du lundi 29/09 à 8h

<table>
<tr><th>Nom</th><th>Énoncé et commentaires</th><th>Note</th></tr>
<tr><td></td><td>PYTHON Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit la matrice $M = (P(i+j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
1. [Py] Calculer $\det(M)$ pour $P(X) = X^3 - 2X + 2$ et pour $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Calculer $\det(M)$ pour $P(X) = 2X^2 + 10X + 3$ et $n = 2, 3, 4, 5$. Que remarque-t-on ?
2. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, et $a \in \mathbb{K}$, exprimer $P(X+a)$ en fonction des $(P^{(k)}(a))_{k \in \mathbb{N}}$.
3. En déduire que si $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $M = AB$ avec A et B deux matrices dont l'expression est simple. Que dire de l'inversibilité de A et de B ?
4. En déduire une preuve de la conjecture faite en python.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1. Cours.Définition et propriétés de la trace.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3.Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = f^3$ et $\dim\ker(f - \mathrm{Id}) = 1$. Montrer qu'il existe une base de dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \{0, 1\}$.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1. Cours. Si φ est application linéaire de rang r, il existe $\mathcal{E}$ base de E et $\mathcal{F}$ base de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) = J_r$.
2. Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tels que pour tout X dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $AXB = 0_n$. Montrer que A ou B est nulle.</td><td></td></tr>
</table>