TD03

exercice 7

$$(f - a\,Id)\circ(f - b\,Id) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

1. on cherche λ tel que

$$\lambda(f-a\,Id)\circ\lambda(f-a\,Id)\cancel{(x)} = \lambda(f-a\,Id)\cancel{(x)}$$

Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$, on a : $\lambda(f-a\,Id)$ est un projecteur non nul

$$\iff \lambda^2\left((f-a\,Id)\circ(f-a\,Id)\right) = \lambda(f-a\,Id)$$

$$\iff \lambda\,(f^2 - 2af + a^2\,Id) = f - a\,Id$$

$$\iff \lambda f^2 - f(2a\lambda+1) + Id(a^2\lambda + a) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Or, $\lambda(f-a\,Id)\circ(f-b\,Id) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$$\lambda f^2 - f\lambda(b+a) + \lambda ab\,Id = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

donc $\lambda f^2 = \lambda f(b+a) - \lambda ab\,Id$

donc $\lambda(f-a\,Id)$ est un projecteur ssi :

$$\lambda f(b+a) - \lambda ab\,Id - f(2a\lambda+1) + Id(a^2\lambda+a) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

càd : $f(\lambda(b+a) - 2a\lambda - 1) - Id(\lambda ab - a^2\lambda + a) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

on choisit λ vérifiant

$$\begin{cases}\lambda(b+a) - 2a\lambda - 1 = 0\\ \lambda ab - a^2\lambda + a = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\lambda(b-a) = 1\\ \lambda(ab - a^2) = -a\end{cases}$$

$$\iff \boxed{\lambda = \frac{1}{b-a}}$$

En posant un tel λ, on peut remonter les équivalences et avoir $\lambda(f-a\,Id)$ est un projecteur

De même, on trouve $\boxed{\mu = \frac{1}{a-b}}$

2. $\boxed{\supset}$ soit $y\in \operatorname{Im}(f-b\,Id)$

donc $\exists x\in E$, tel que $y = f(x) - bx$

alors $f(y) - ay = (f - aId) \circ (f - bId)(x)$

donc $f(y) - ay = 0$

donc $f(y) = ay$ donc $y \in \ker(f - aId)$

$(u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \mathrm{Im}(v) \subset \ker(u))$

$\boxed{\subset}$ déjà, $\ker(\mu(f - bId)) \oplus \mathrm{Im}(\mu(f - bId))$

comme $\mu \neq 0$, $\ker(\mu(f - bId)) = \ker(f - bId)$

$\mathrm{Im}(\mu(f - bId)) = \mathrm{Im}(f - bId)$

Soit $x \in \ker(f - aId)$

Soit $yz \in \ker(f - bId) \times \mathrm{Im}(f - bId)$

$x = y + z$

donc $0 = f(y) - ay + f(z) - az$
$= by - ay + f(z) - az$

donc $0 = (b-a)y + 0$ car $z \in \mathrm{Im}(f - bId) \subset \ker(f - aId)$

$0 = (b-a)y$ donc $y = 0$

$x = z \in \mathrm{Im}(f - bId)$

ainsi, par double inclusion,

$$\boxed{\ker(f - aId) = \mathrm{Im}(f - bId)}$$

3. Posons $P = X^2 - (a+b)X + ab$. P annule f

effectuons la division euclidienne de X^n par P

$X^n = QP + R$ $\deg(R) = 1$

On cherche sous la forme $R = cX + d$ avec $(c,d) \in \mathbb{R}^2$

$a^n = Q(a)P(a) + R(a)$

donc $a^n = ca + d$

$$\boxed{d = \frac{b^n a - a^n b}{a - b}}$$

de même, $b^n = cb + d$

on trouve $\boxed{c = \frac{a^n - b^n}{a - b}}$

donc $f^n = Q(f) \circ P(f) + R(f)$

$$\boxed{f^n = \frac{a^n - b^n}{a - b} f + \frac{b^n a - a^n b}{a - b} Id}$$

exercice 9

soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ et $P \in M_n(\mathbb{R})$ qui représente p

$$\Psi : X \longmapsto PX - XP$$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

$$PE_{ij} - E_{ij}P = \sum_{a,k} [P]_{ak} E_{ak} E_{ij} - \sum_{a,k} E_{ij} [P]_{ak} E_{ak}$$

$$= \sum_{a,k} [P]_{ak} \delta_{ki} E_{aj} - \sum_{a,k} [P]_{ak} \delta_{ja} E_{ik}$$

$$= \sum_{a=1}^{n} [P]_{ai} E_{aj} - \sum_{k=1}^{n} [P]_{jk} E_{ik}$$

Dans cette somme, le coeff devant E_{ij} sont les $\left([P]_{ii} - [P]_{jj}\right)$

Alors si M est la matrice de Ψ dans la base canonique, alors $Tr(M) = Tr(\Psi)$

$$Tr(\Psi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left([P]_{ii} - [P]_{jj}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(n [P]_{ii} - \sum_{j=1}^{n} [P]_{jj}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(n [P]_{ii} - Tr(P)\right)$$

$$= n\, Tr(P) - n\, Tr(P)$$

$$\boxed{Tr(\Psi) = 0}$$