TD 03
Révisions d'algèbre linéaire – un exercice de colle

Énoncé. Soit E un $\mathbb{K}$-evdf n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\ker(\varphi) = F$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = G$.

Solution, beaucoup plus simple que ce que j'ai raconté en classe.
Une condition nécessaire est $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, par le théorème du rang (déjà fait).
Supposons maintenant que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$. On prend S un supplémentaire de F dans E. Alors $\dim(S) = \dim(G)$. On prend une base $(f_1, \ldots, f_p)$ de F, une base $(s_1, \ldots, s_q)$ de S et une base $(g_1, \ldots, g_q)$ de G (on a bien le même q car $\dim(S) = \dim(G)$).
On sait alors que $(f_1, \ldots, f_p, s_1, \ldots, s_q)$ est une base de E. On définit φ par

- $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \varphi(f_i) = 0$,
- $\forall i \in [\![1, q]\!],\ \varphi(s_i) = g_1$.

Alors on en déduit facilement que $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p) = F$ et que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_q) = G$.