N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 04
Algèbre bilinéaire – Résumé de cours

1 Produit scalaire

Définition 1

Un espace préhilbertien réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive) généralement noté $\langle x, y\rangle$ ou $x \cdot y$ ou $(x \mid y)$. Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie. La norme associée au produit scalaire est $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Exemple 2

1. Produits scalaires canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$.
2. Produit scalaire intégral (sur $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, sur $\mathbb{R}[X]$).
3. Espaces L^2 et ℓ^2.

Proposition 3

1. (identités remarquables) $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$ et $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x + y, x - y\rangle$
2. (identités de polarisation) $\langle x, y\rangle = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$.

Remarque 4

Il faut pouvoir développer $\|x_1 + \cdots + x_n\|^2$.

Proposition 5

1. (inégalité de Cauchy-Schwarz) $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires ; $\langle x, y\rangle \leqslant \|x\|\,\|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires.
2. (inégalité triangulaire) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires.

2 Orthogonalité

Définition 6

Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux, et on note $x \perp y$, si $\langle x, y\rangle = 0$.
L'orthogonal d'une partie A d'un espace préhilbertien, noté $A^\perp$, est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A.
Deux sous-espaces F et G sont dits orthogonaux lorsque : $\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x, y\rangle = 0$.

Proposition 7 (Théorème de Pythagore)

1. Pour tous vecteurs x et y, $x \perp y$ si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
2. Pour toute famille orthogonale $(x_1, \dots, x_n)$, $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$.

Remarque 8

F et G orthogonaux $\iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp$

Proposition 9

Pour toute partie non vide A d'un préhilbertien E, $A^\perp$ est un sous-espace de E.

Proposition 10

1. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
2. Plus généralement, toute somme de sous-espaces 2 à 2 orthogonaux est directe.

Proposition 11

1. Si u est un vecteur, alors $H = \mathrm{Vect}(u)^\perp$ et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux.
2. Tout sous-espace de dimension finie de E possède une base orthonormée.

Définition 12

Un tel vecteur u, s'il est unitaire, est appelé vecteur normal à H.

Proposition 13

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de E, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une BON de F.

1. Pour $(x, y) \in E^2$, $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle\, e_i$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$.
2. Pour $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = (\langle u(e_j), f_i \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
   Pour un endomorphisme φ c'est donc $\langle u(e_j), e_i \rangle$.

3 Projection orthogonale et orthonormalisation

Définition 14

Si A est une partie de E, on définit $d(x, A) = \inf(\{\|x - a\|,\ a \in A\})$.

Proposition 15

Si F est un sous-espace de dimension finie, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

Définition 16

On définit alors **la** projection orthogonale sur F.

Proposition 17

On note p_F la projection orthogonale sur F.

1. Pour tout x dans E, $p(x) \perp (x - p(x))$.
2. Pour tout x dans E, $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$.
3. La distance de x à un sous-espace vectoriel de dimension finie F est atteinte en un point unique : le projeté orthogonal de x sur F.

Remarque 18

Si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base orthonormée de F, la projection orthogonale de x sur F est : $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle e_i, x \rangle \cdot e_i$.
Si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base orthogonale de F, la projection orthogonale de x sur F est : $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\|e_i\|^2} \langle e_i, x \rangle \cdot e_i$.
La projection orthogonale peut aussi être obtenue en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice (**non nécessairement orthogonale**) de F.

Proposition 19

Soit u un vecteur non nul de norme 1 et $H = \mathrm{Vect}(u)^\perp$ l'hyperplan de vecteur normal u.

1. L'expression de la projection orthogonal sur H, p_H, est : $p_H(x) = x - \langle x, u \rangle u$.
2. La distance de x à H est $|\langle x, u \rangle|$.

Proposition 20 (Théorème de représentation)

Si E est un espace euclidien et $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, alors il existe un unique $u \in E$ tel que

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle u, x \rangle .$$

Proposition 21 (Orthogonalisation de Gram-Schmidt)

Si $(e_1, \dots, e_r)$ est une famille libre de E, il existe une famille orthogonale $(u_1, \dots, u_r)$ vérifiant

$$\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_k)\,\forall k \in [\![1, r]\!].$$

De plus, une telle famille est unique à multiplication près de chacun des u_i par un scalaire non nul.
Cette famille est définie (à la constante multiplicative près) par $u_1 = e_1$ et

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1, r]\!],\ u_k &= e_k - p_{\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})}(e_k) \\ &= e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle e_k, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i. \end{aligned}$$