TD 04
Espaces préhilbertiens réels – révisions

Exercice 1. *Endomorphisme antisymétrique*. Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Démontrer qu'on a l'équivalence entre :
- $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.
- $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$.

On suppose désormais que ces conditions sont vérifiées.

2. Démontre que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

3. Que dire de la matrice de u dans une base orthonormée ?

Exercice 2. *Similitudes*. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$, non nul. On veut démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes

(1) $\exists \lambda > 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

(2) $\forall (x,y) \in E^2,\ x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(x)$.

1. Montrer que (1) $\Rightarrow$ (2).

2. On suppose désormais (2). Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

(a) Soit $i \neq j$. Démontrer que $\|u(e_i)\|^2 = \|u(e_j)\|^2$.
En faisant la différence des deux quantités, on reconnaîtra une identité remarquable.

(b) En déduire la proposition (2).

Exercice 3. *Mines-Télécom 24*. Soit, dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, $\mathscr{P} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z+t = x-y+z-t = 0\right\}$. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$.

Exercice 4. *CCINP 23*. Soit p un projecteur d'un espace euclidien E.

1. Pour $(y,z) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, développer $\|y + \lambda z\|^2$.

2. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 5. *Mines-Ponts 23*. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 \,\mathrm{d}t$.

Exercice 6. *Mines-Ponts 23*. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et, pour $i \in [\![0,3]\!]$, $L_i = \displaystyle\prod_{k\in[\![0,3]\!]\setminus\{i\}} \frac{X-k}{i-k}$.

1. Calculer $L_i(j)$ pour $j \in [\![0,3]\!]$ puis montrer que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base de E.

2. Montrer que $(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} (P(k) + P(k+1))(Q(k) + Q(k+1))$ définit un produit scalaire sur E.

3. Trouver une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 7. *Mines-Ponts PC 24*. **1.** Montrer que l'application $(P,Q) \in \mathbb{R}[X] \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{P(t)Q(t)}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire.

2. On considère l'orthonormalisée $(P_0, \dots, P_n)$ de la base canonique $(1, \dots, X^n)$. Calculer P_0 et montrer que, pour tout k, P_k est scindé à racines simples toutes positives.

Exercice 8. *CCINP 23, ex-X MP*. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \cap \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$, soit $y \in E$ tel que $x = f(y) - y$.

1. Exprimer $f^n(y)$ en fonction de x, y et n.

2. En déduire que $E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$.

3. Soit x quelconque. On note $g_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$. Démontrer que $\|g_n(x) - y\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, où y est le projeté de x sur $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$

Exercice 9. *Mines-Télécom 23*. Soit E l'espace des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour$(f, g) \in E^2$, on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$. On considère $F = \{f \in E, \forall x \in [0, 1], f(x) = 0\}$ et $G = \{g \in E, \forall x \in [-1, 0], g(x) = 0\}$.

1. Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. Montrer que F et G sont en somme directe orthogonale.

3. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

4. Montrer que $G \subset F^\perp$ puis que $G = F^\perp$.

Exercice 10. *Mines-Ponts 24*. Soit $(E, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E.

1. Montrer que $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.

2. Pour $E = \mathbf{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ et $F = \{P \in E, P(1) = P'(1) = 0\}$, déterminer $F^\perp$ et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

3. Retour au cas général : donner une condition suffisante pour que $F = \left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice 11. *Centrale 22*. Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge. Pour $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ dans E, on pose $\langle u, v\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

2. Montrer que $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

3. Montrer que si $u \in E$ ne s'annule pas, $(1/u_n)_{n\in\mathrm{N}} \notin E$.

4. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $(1/n^\alpha)_{n\in\mathrm{N}} \in E$.

5. Soit F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que F est un sous-espace de E de dimension infinie. Que dire de $F + F^\perp$ et de $\left(F^\perp\right)^\perp$?

Exercice 12. *Centrale 22*. On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

1. Soit P_{X^3} le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. Avec Python, montrer que le polynôme $X^3 - P_{X^3}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

2. Écrire une fonction d'arguments $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, Q \in \mathbb{R}_3[X]$, et renvoie $\lambda_1 Q(y_1) + \lambda_2 Q(y_2) + \lambda_3 Q(y_3)$

3. Déterminer les $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels existe un unique $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant : $\forall Q \in \mathbb{R}_3[X], \displaystyle\int_0^1 Q(t)\mathrm{d}t = \lambda_1 Q(y_1) + \lambda_2 Q(y_2) + \lambda_3 Q(y_3)$

4. Calculer alors avec Python les coefficients λ_1, λ_2 et λ_3.

Exercice 13. *Mines PC 24*. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ des réels non nuls. On pose, pour $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) Q(a_k)$.

1. Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. Donner une base orthonormée de E.

3. On pose $H = \left\{ P \in E, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et donner sa dimension.

4. Soit $Q \in E$. Calculer la distance de Q à H.

Exercice 14. *Centrale 24*. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $u = (a, b, c)^T$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. On note $D = \mathrm{Vect}(u)$ et p la projection orthogonale sur D.

1. Exprimer $p(v)$ pour tout vecteur $v = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

2. Exprimer $f \circ f$ en fonction de p.

3. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$. Montrer que ces deux espaces sont supplémentaires orthogonaux.

4. Montrer que $f^3 = -f$.

Exercice 15. *CCINP 24*. Soit $\phi(A, B) = \int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t}dt$ avec$(A, B) \in \mathbb{R}[X]$

1. Montrer que ϕ défini un produit scalaire qu'on notera $(\cdot|\cdot)$ puis que $\left(X^k \mid 1\right) = k!$.

2. On pose Q la projection de 1 sur $F = \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^n\right)$, montrer qu'il existe $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tel que $Q = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$.

On note $P = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{j=1}^{k}(X + j)$.

3. Calculer $\left(1 - Q|X^i\right)$ et en déduire que $P(i) = 0, \forall i \in [\![1, n]\!]$.

4. En déduire une expression de P.

5. Montrer que $\inf_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \int_0^{+\infty} \left(1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n\right)^2 e^{-t}dt = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 16. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ n vecteurs unitaires d'un espace euclidien E. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ n variables aléatoires iid de Rademacher, i.e. $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$.

1. Calculer $\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} X_i e_i\right\|^2\right)$.

2. En déduire qu'il existe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}$ tels que $\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i\right\| \leqslant \sqrt{n}$.