nlaillet.math@gmail.com

TD 04
Espaces préhilbertiens réels – révisions

Exercice 1. *Endomorphisme antisymétrique*. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Démontrer qu'on a l'équivalence entre :

- $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.
- $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$.

Correction

Supposons la première propriété. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned}\langle u(x), x\rangle &= -\langle x, u(x)\rangle \text{ par la première propriété.}\\ &= -\langle u(x), x\rangle \text{ par symétrie du produit scalaire.}\end{aligned}$$

Donc $\langle u(x), x\rangle = 0$.
Supposons la deuxième propriété vérifiée. Soient x et y dans E. Alors, par hypothèse, $\langle u(x+y), x+y\rangle = 0$. Or,

$$\begin{aligned}\langle u(x+y), x+y\rangle &= \langle u(x)+u(y), x+y\rangle\\ &= \underbrace{\langle u(x), x\rangle}_{=0} + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \underbrace{\langle u(y), y\rangle}_{=0}\\ &= \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle .\end{aligned}$$

Donc $\langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle = 0$, d'où la première propriété.

On suppose désormais que ces conditions sont vérifiées.

2. Démontre que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

Correction

Étant donné le théorème du rang, il suffit de démontrer que $\ker(u) \perp \mathrm{Im}(u)$: cela assure l'orthogonalité comme le caractère direct de la somme. Soit alors $x \in \ker(u)$ et $y \in \mathrm{Im}(u)$: on dispose de $w \in E$ tel que $y = u(w)$. Alors

$$\langle x, y\rangle = \langle x, u(w)\rangle = -\langle u(x), w\rangle = 0.$$

3. Que dire de la matrice de u dans une base orthonormée ?

Correction

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, M la matrice de u dans cette base. Alors

$$[M]_{ij} = \langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle e_j, u(e_i)\rangle = -[M]_{ji}$$

Donc M est antisymétrique.

Exercice 2. *Similitudes*. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$, non nul. On veut démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes

(1) $\exists \lambda > 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

(2) $\forall (x, y) \in E^2,\ x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(x)$.

1. Montrer que (1) ⇒ (2).

Correction

Supposons que l'on dispose de $\lambda > 0$ tel que pour tout x dans E, $\|u(x)\| = \|x\|$.
Soient x et y deux vecteurs orthogonaux. Alors

$$\begin{aligned}\langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2}{4} \text{ par identité de polarisation}\\ &= \frac{\|u(x + y)\|^2 - \|u(x - y)\|^2}{4} \text{ par linéarité}\\ &= \frac{\lambda^2 \|x + y\|^2 - \lambda^2 \|x - y\|^2}{4}\\ &= \lambda^2 \langle x, y\rangle \text{ par polarisation}\\ &= 0,\end{aligned}$$

donc $u(x) \perp u(y)$.

2. On suppose désormais (2). Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

(a) Soit $i \neq j$. Démontrer que $\|u(e_i)\|^2 = \|u(e_j)\|^2$.
En faisant la différence des deux quantités, on reconnaîtra une identité remarquable.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned}\|u(e_i)\|^2 - \|u(e_j)\|^2 &= \langle u(e_i) + u(e_j), u(e_i) - u(e_j)\rangle\\ &= \langle u(e_i + e_j), u(e_i - e_j)\rangle .\end{aligned}$$

Mais $\|e_i\|^2 = \|e_j\|^2$ donc $\langle e_i + e_j, e_i - e_j\rangle = 0$ (cela se voit sur un dessin aussi !)
Donc $(e_i + e_j) \perp (e_i - e_j)$ donc, par hypothèse, $u(e_i + e_j) \perp u(e_i - e_j)$.
Ainsi, $\|u(e_i)\|^2 - \|u(e_j)\|^2 = 0$, donc $\boxed{\|u(e_i)\|^2 = \|u(e_j)\|^2}$.

(b) En déduire la proposition (2).

Correction

Posons $\lambda = \|u(e_1)\|$ $(= \|u(e_i)\|\ \forall i)$. Soit désormais $x \in E$, écrivons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Alors

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)\right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|x_i u(e_i)\|^2 \text{ car, par hypothèse, } (u_(e_1), \ldots, u(e_n) \text{ est orthogonale} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|u(e_i)\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda^2 \\
&\boxed{= \lambda^2 \|x\|^2,}
\end{aligned}$$

ce qui est exactement le résultat recherché !

Exercice 3. *Mines-Télécom 24*. Soit, dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, $\mathscr{P} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = x - y + z - t = 0\right\}$. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$.

Correction

On détermine déjà une base orthonormée de $\mathscr{P}$. Pour ce faire, on résout le système linéaire : soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ \quad -2y - 2t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ \quad -2y - 2t = 0 \\ \qquad z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \\ \qquad t = \beta,\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = -\beta \\ z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \\ t = \beta,\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Or, ces deux vecteurs sont orthogonaux, donc une base orthonormée de $\mathscr{P}$ est (u, v) où $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, si $\pi_{\mathscr{P}}$ est la projection orthogonale sur $\mathscr{P}$, on a ;

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ \pi_{\mathscr{P}}(X) = \langle X, u\rangle\, u + \langle X, v\rangle\, v = \frac{-x+z}{2} u + \frac{-y+t}{2} v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-z \\ y-t \\ -x+z \\ -y+t \end{pmatrix} = AX,$$

où A est la matrice de $\pi_{\mathscr{P}}$ dans la base canonique au départ et à l'arrivée :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$ a pour expression $s = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E$, on en déduit que la matrice de cette symétrie dans cette base canonique est donc

$$2A - \mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(On reconnaît qu'on a bien la matrice d'une symétrie)

Exercice 4. *CCINP 23*. Soit p un projecteur d'un espace euclidien E.

1. Pour $(y, z) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, développer $\|y + \lambda z\|^2$.

Correction

On calcule :

$$\|y + \lambda z\|^2 = \|y\|^2 + 2\lambda \langle y, z\rangle + \lambda^2 \|z\|^2.$$

2. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Correction

- Déjà, si p est un projecteur orthogonal, alors pour tout x dans E, $p(x) \perp x - p(x)$ (par orthogonalité de l'image et du noyau de p). Alors, si x est dans E, par le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|p(x) + (x - p(x))\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2.$$

  D'où l'inégalité désirée.
- Ensuite, si pour tout x dans E, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$, on montre que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux (on sait déjà qu'ils sont supplémentaires car p est déjà un projecteur !) Soit y dans $\ker(p)$ et z dans $\mathrm{Im}(p)$. On souhaite montrer que $\langle y, z\rangle = 0$. Pour ce faire, on remarque que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\|p(y + tz)\|^2 \leqslant \|y + tz\|^2$, c'est-à-dire que pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\|tz\|^2 \leqslant \|y\|^2 + 2t \langle y, z\rangle + \|tz\|^2,$$

i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \|y\|^2 + 2t\langle y, z\rangle.$$

Or, une fonction affine est de signe constant si et seulement si son coefficient directeur est nul. On en déduit que $\langle y, z\rangle = 0$, c'est-à-dire que $\ker(p) \perp \operatorname{Im}(p)$.

Exercice 5. *Mines-Ponts 23*. Déterminer $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 \,\mathrm{d}t$.

Correction

On rappelle, pour cet exercice, que l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle.

On note, pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. On vérifie aisément qu'il s'agit d'un produit scalaire.

On note aussi $F = \mathbb{R}_2[X]$: il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, de dimension finie. La quantité que l'on recherche est

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 \,\mathrm{d}t = \inf_{P\in\mathbb{R}_2[X]} \left\|X^3 - P\right\|^2 = d(X^4, F).$$

Or, on sait que cette distance est atteinte en $p_F(X^4)$, le projeté orthogonal de X^4 sur F. Pour déterminer ce projeté orthogonal, deux méthodes.

Méthode 1 Déterminons une base orthonormée (ou au moins orthogonale) de F. On sait que $(P_0, P_1, P_2) = (1, X, X^2)$ est une base de F, orthogonalisons-la selon le procédé de Gram-Schmidt.

On remarque déjà que $(1, X)$ est une famille orthogonale. Il reste donc à changer X^2 pour qu'il soit orthogonal à 1 et à X. On sait, par le cours, que l'on peut poser

$$P = P_2 - \frac{\langle P_0, P_2\rangle}{\|P_0\|^2}P_0 - -\frac{\langle P_1, P_2\rangle}{\|P_1\|^2}P_1.$$

Or,

$$\langle P_0, P_2\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3},$$

$$\|P_0\|^2 = \int_{-1}^{1} 1 dt = 2,$$

$$\langle P_1, P_2\rangle = \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0.$$

Donc en posant

$$P = X^2 - \frac{1}{3},$$

On a $\left(1, X, X^2 - \frac{1}{3}\right)$ qui est une base orthogonale de F. On calcule :

$$\|P_0\|^2 = 2,\ \|P_1\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3},\ \|P_2\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p_F(X^3) &= \frac{\left\langle X^3, P_0 \right\rangle}{\|P_0\|^2} P_0 + \frac{\left\langle X^3, P_1 \right\rangle}{\|P_1\|^2} P_1 + \frac{\left\langle X^3, P_2 \right\rangle}{\|P_2\|^2} P_2 \\ &= 0 + \frac{3}{5} X + 0. \end{aligned}$$

Et là, c'est passionnant, on en déduit que la distance recherchée est

$$\left\| X^3 - p_F(X^3) \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right)^2 dt = \frac{8}{175}.$$

Méthode 2, plus astucieuse. Notons $Q = p_F(X^3)$. Alors $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. Or, $X^3 - Q$ est orthogonal à 1, à X et à X^2. Donc on a le système

$$\begin{cases} \left\langle X^3 - Q, P_0 \right\rangle = 0 \\ \left\langle X^3 - Q, P_1 \right\rangle = 0 \\ \left\langle X^3 - Q, P_2 \right\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3}\alpha - 2\gamma = 0 \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\beta = 0 \\ -\frac{2}{5}\alpha - \frac{2}{3}\gamma = 0 \end{cases}$$

La première et la dernière ligne donnent $\alpha = \gamma = 0$. La deuxième ligne donne $\beta = \frac{3}{5}$. On obtient donc le même projeté que précédemment ! On calcule donc

$$\begin{aligned} \left\| X^3 - p_F(X^3) \right\|^2 &= \left\langle X^3 - p_F(X^3), X^3 - p_F(X^3) \right\rangle \\ &= \left\langle X^3 - p_F(X^3), X^3 \right\rangle - \left\langle X^3 - p_F(X^3), p_F(X^3) \right\rangle \\ &= \left\langle X^3 - p_F(X^3), X^3 \right\rangle \\ &= \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right) t^3 dt \\ &= \int_{-1}^{1} t^6 - \frac{3}{5} t^4 dt \\ &= \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{8}{175}. \end{aligned}$$

Exercice 6. *Mines-Ponts 23*. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et, pour $i \in [\![0, 3]\!]$, $L_i = \prod_{k \in [\![0,3]\!] \setminus \{i\}} \frac{X - k}{i - k}$.

1. Calculer $L_i(j)$ pour $j \in [\![0, 3]\!]$ puis montrer que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base de E.

Correction

Il s'agit de la base d'interpolation de Lagrange ! $L_i(j) = \delta_{ij}$, et (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base de E par le cours.

2. Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{3} (P(k) + P(k+1))(Q(k) + Q(k+1))$ définit un produit scalaire sur E.

Correction

La symétrie, la bilinéarité sont évidentes.
Soit désormais P dans $\mathbb{R}_3[X]$. Alors

$$\langle P, P\rangle = \sum_{k=0}^{3} (P(k) + P(k+1))^2 \geqslant 0,$$

donc la forme est positive. Pour le caractère défini, on remarque que si $\langle P, P\rangle = 0$, alors pour tout k dans $[\![0, 3]\!]$, $P(k) + P(k+1) = 0$. Donc

$$P(0) + P(1) = P(1) + P(2) = P(2) + P(3) = P(3) + P(4) = 0,$$

donc $P(0) = P(2) = P(4)$ et $P(1) = P(3) = -P(2)$. Ainsi, par le théorème d'interpolation de Lagrange,

$$P = P(0)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2 + P(3)L_3 = P(0)(L_0 - L_1 + L_2 - L_3).$$

Mais $P(4) = P(0)$. Or,

$$P(4) = P(0)(L_0(4) - L_1(4) + L_2(4) - L_3(4)).$$

Un bref calcul donne

$$\begin{aligned} L_0(4) - L_1(4) + L_2(4) - L_3(4) &= \frac{3 \times 2 \times 1}{(-3) \times (-2) \times (-1)} - \frac{4 \times 2 \times 1}{1 \times (-1) \times 2} + \frac{4 \times 3 \times 1}{2 \times 1 \times -1} - \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} \\ &= -1 + 4 - 6 - 4 = -7 \neq 1, \end{aligned}$$

donc $P(0) = P(4) = -7P(0)$ donc $P(0) = 0$ **donc** $P = 0_E$. Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie, et il s'agit bien d'un produit scalaire.

3. Trouver une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Correction

Utilisons le procédé de Gram-Schmidt pour orthogonaliser, puis orthonormaliser la base (L_0, L_1, L_2, L_3) pour ce produit scalaire.
On pose $P_0 = L_0$, puis

$$P_1 = L_1 - \frac{\langle L_1, P_0\rangle}{\|P_0\|^2} P_0 = L_1 - L_0,$$

puis, en remarquant que $\|P_1\|^2 = \sum_{k=0}^{3} (P_1(k) + P_1(k+1))^2 = 0 + 1 + 0 + 0 = 1$,

$$\begin{aligned} P_2 &= L_2 - \frac{\langle L_2, P_0\rangle}{\|P_0\|^2} P_0 - \frac{\langle L_2, P_1\rangle}{\|P_1\|^2} P_1 \\ &= L_2 - P_0 - L_1 + L_0 = L_2 - L_1, \end{aligned}$$

 nlaillet.math@gmail.com

puis, enfin, en remarquant que $\|P_2\|^2 = 2$,

$$\begin{aligned} P_3 &= L_3 - \frac{\langle L_3, P_0\rangle}{\|P_0\|^2}P_0 - \frac{\langle L_3, P_1\rangle}{\|P_1\|^2}P_1 - \frac{\langle L_3, P_2\rangle}{\|P_2\|^2}P_2 \\ &= L_3 - 0 - 0 - \frac{1}{2}(L_2 - L_1) \\ &= L_3 - \frac{L_2}{2} + \frac{L_1}{2}. \end{aligned}$$

On remarque qu'alors $\|P_3\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{6}{4}$. Ainsi, la famille

$$\left(L_0, L_1 - L_0, \frac{1}{\sqrt{2}}(L_2 - L_1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2L_3 - L_2 + L_1)\right)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 7. *Mines-Ponts PC 24*. **1.** Montrer que l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{P(t)Q(t)}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire.

Correction

On rappelle que $\operatorname{ch}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$.

Déjà, on vérifie que la quantité est toujours définie. Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, $f : t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\operatorname{ch}(t)}$. Alors

- f est continue sur $[0, +\infty[$,
- si $p = \deg(P)$, $q = \deg(Q)$, a_p et b_q sont les coefficients dominants respectifs de P et de Q, alors

$$t^2 f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^2 a_p t^p a_q t^q}{\frac{\mathrm{e}^t}{2}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par croissances comparées. Donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc f est intégrable en $+\infty$.

Donc la quantité, nommons-la $\langle P, \mathbb{Q}\rangle$ est bien définie. Ensuite, vu le nombre de fois où on a montré que ce genre de quantité est un produit scalaire, je me permets de ne pas le faire ici.

2. On considère l'orthonormalisée $(P_0, \dots, P_n)$ de la base canonique $(1, \dots, X^n)$. Calculer P_0 et montrer que, pour tout k, P_k est scindé à racines simples toutes positives.

Correction

Déjà, $P_0 = \dfrac{1}{\|1\|}$. Or,

$$\begin{aligned}
\|1\|^2 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(t)} dt \\
&= \frac{0}{+\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \\
&= \frac{0}{+\infty} \frac{2\mathrm{e}^t}{1 + (\mathrm{e}^t)^2} \\
&= \left[2\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^t)\right]_0^{+\infty} \\
&= 2\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Donc $P_0 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.
Ensuite, on sait que pour tout k, P_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Ainsi, pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à k, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{P_k(t)Q(t)}{\mathrm{ch}(t)} dt = 0.$$

Supposons que P_k possède strictement moins de k racines dans $\mathbb{R}_+$. Notons $\omega_1, \dots, \omega_\ell$ les racines de P_k **en lesquelles** P_k **change de signe**. Considérons $Q = \prod_{i=1}^{\ell}(X - \omega_i) \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Alors $\langle P_k, Q\rangle = 0$, **mais** P_kQ est de signe constant sur $\mathbb{R}_+$ car les deux polynômes changent de signe en même temps. Ainsi, comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{P_k(t)Q(t)}{\mathrm{ch}(t)} dt = 0$ et que $t \mapsto \dfrac{P_k(t)Q(t)}{\mathrm{ch}(t)}$ est continu, de signe constant sur $\mathbb{R}_+$, $\dfrac{P_k(t)Q(t)}{\mathrm{ch}(t)} = 0$ pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, donc P_k est nul sur $\mathbb{R}_+$, absurde !
Donc P_k possède au moins k racines distinctes dans $\mathbb{R}_+$. Étant de degré k, il est donc scindé à racines simples, à racines dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 8. *CCINP 23, ex-X MP*. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$, soit $y \in E$ tel que $x = f(y) - y$.

1. Exprimer $f^n(y)$ en fonction de x, y et n.
2. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$.
3. Soit x quelconque. On note $g_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$. Démontrer que $\|g_n(x) - y\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, où y est le projeté de x sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$

Correction

1. On remarque que pour tout k, $f^k(x) = f^{k+1}(y) - f^k(y)$. Mais $f^k(x) = x$. Ainsi, pour n

dans $\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}(y) - f^k(y),$$

soit, comme $f^k(x) = x$ et par télescopage,

$$nx = f^n(y) - y, \text{ d'où } \boxed{f^n(y) = nx + y.}$$

2. On en déduit alors que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\|x\| = \left\|\frac{1}{n}f^n(y) - \frac{1}{n}y\right\| \leqslant \frac{1}{n}\|f^n(y)\| + \frac{1}{n}\|y\| \leqslant \frac{2}{n}\|y\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

la dernière inégalité venant du fait que $\|f^n(y)\| = \left\|f(f^{n-1}(y))\right\| \leqslant \left\|f^{n-1}(y)\right\| \leqslant \cdots \leqslant \|y\|$, d'où $\|x\| = 0$, donc $x = 0$.

3. On écrit $x = y + z$ où $y \in \ker(f - \mathrm{Id})$ et $z = f(w) - w$. Alors on en déduit que

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(y) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(z) \\ &= y + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}(w) - f^k(w) \\ &= y + \frac{1}{n}(f^n(w) - w), \end{aligned}$$

donc $\|g_n(x) - y\| \leqslant \dfrac{2\|w\|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Exercice 9. *Mines-Télécom 23*. Soit E l'espace des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour$(f,g) \in E^2$, on pose $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$. On considère $F = \{f \in E, \forall x \in [0,1], f(x) = 0\}$ et $G = \{g \in E, \forall x \in [-1,0], g(x) = 0\}$.

1. Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Correction

Déjà fait en classe.

2. Montrer que F et G sont en somme directe orthogonale.

Correction

Soit f dans F et g dans G. Alors

$$\int_{-1}^{1} fg = \int_{-1}^{0} fg + \int_{0}^{1} fg = \int_{-1}^{0} f(t) \times 0dt + \int_{0}^{1} 0 \times g(t)dt = 0,$$

d'où l'orthogonalité de ces deux espaces !

3. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Correction

NON ! Pour toute f dans $F+G$, $f(0)=0$ donc $F+G$ n'est pas égal à E.

4. Montrer que $G \subset F^{\perp}$ puis que $G = F^{\perp}$.

Correction

On sait déjà que F et G sont orthogonaux, donc $G \subset F^{\perp}$.
Soit désormais $g \in F^{\perp}$. Alors pour toute f dans F, $\displaystyle\int_{-1}^{1} fg = 0$.
Prenons f définie ainsi : $f(x) = 0$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = xg(x)$ si $x \in [-1,0]$. Alors $f \in F$, donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} fg = 0$, donc $\displaystyle\int_{-1}^{0} xg(x)^2 = 0$. Mais $x \mapsto xg(x)^2$ est continue, de signe constant, d'intégrale nulle sur $[-1,0]$, donc est nulle sur cet intervalle. Donc pour tout x de $[-1,0[$, $g(x)=0$, ce qui implique, par continuité, que g est nulle sur $[-1,0]$, donc $g \in G$.
D'où l'inclusion réciproque et l'égalité !

Exercice 10. *Mines-Ponts 24*. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E.

1. Montrer que $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Correction

Soit x dans F. Soit $y \in F^{\perp}$. Alors $\langle x, y \rangle = 0$ donc $x \in (F^{\perp})^{\perp}$.

2. Pour $E = \mathbf{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ et $F = \{P \in E, P(1) = P'(1) = 0\}$, déterminer $F^{\perp}$ et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Correction

On ne demande pas de vérifier que l'on a un produit scalaire ici.

Déterminons $F^{\perp}$. Soit Q dans $F^{\perp}$. Alors pour tout P dans F, $\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt = 0$.
Considérons $Q(X) = (X-1)^2 P(X)$. Alors $Q(1) = Q'(1) = 0$ car 1 est racine au moins

 nlaillet.math@gmail.com

double de Q. On en déduit que

$$\int_0^1 (t-1)^2 P(t)^2 dt = 0,$$

donc, comme $t \mapsto (t-1)^2 P(t)^2$ est une fonction continue, positive, d'intégrale nulle, on en déduit que : $\forall t \in [0,1],\ (t-1)^2 P(t)^2 = 0$. En particulier, P s'annule une infinité de fois (sur $[0,1[$) donc P est le polynôme nul.
Donc $F^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Ainsi, $(F^\perp)^\perp = E$.

3. Retour au cas général : donner une condition suffisante pour que $F = \left(F^\perp\right)^\perp$.

Correction

C'est du cours encore : il suffit que F soit de dimension finie. Si c'est le cas, on prend $(f_1, \ldots, f_p)$ une base orthonormée de F, et alors on a montré que $F \oplus (F^\perp) = E$, la somme étant orthogonale. Donc $F = (F^\perp)^\perp$.

Exercice 11. *Centrale 22*. Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge. Pour $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ dans E, on pose $\langle u, v\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

Correction

Déjà, la suite nulle est clairement dans E.
Ensuite, soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ dans E, λ et μ deux réels. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$(\lambda u_n + \mu v_n)^2 = \lambda^2 u_n^2 + 2\lambda\mu u_n v_n + \mu^2 v_n^2.$$

Or,

- la série de terme général u_n^2 converge,
- la série de terme général v_n^2 converge,
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\boxed{|u_n v_n| \leqslant \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$ donc la série de terme général $u_n v_n$ converge absolument donc converge.

On en déduit, par combinaison linéaire, que la série de terme général $(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

2. Montrer que $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

Correction

Déjà, pour u et v, l'inégalité $|u_n v_n| \leqslant \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}$ assure que l'on peut définir le produit scalaire $\langle u, v\rangle$.
Ensuite, vérifions les propriétés fondamentales :

- **Symétrie.** Elle est évidente car pour $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ dans E, $\sum_{n\geqslant 0} u_n v_n = \sum_{n\geqslant 0} v_n u_n$.
- **Bilinéarité.** Soient $u = (u_n)$, $v = (v_n)$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E, λ et μ deux réels. Alors

$$\begin{aligned}
\langle \lambda u_n + \mu v_n, w_n\rangle &= \sum_{n\geqslant 0} (\lambda u_n + \mu v_n) w_n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \lambda u_n w_n + \mu v_n w_n \\
&= \lambda \sum_{n\geqslant 0} u_n w_n + \mu \sum_{n\geqslant 0} v_n w_n \text{ par linéarité de la somme d'une série} \\
&= \lambda \langle u, w\rangle + \mu \langle u, w\rangle ,
\end{aligned}$$

  D'où la lineárité par rapport à la première variable et, par symétrie, la bilinéarité.
- **Positivité.** Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E. Alors

$$\langle u, u\rangle = \sum_{n\geqslant 0} u_n^2 \geqslant 0,$$

  car $\langle u, u\rangle$ est la somme d'une série à termes positifs.
- **Caractère défini.** Dans l'inégalité précédente, comme la série est à terme positifs, la somme de la série est nulle si et seulement si chaque terme est nul, i.e. si et seulement si u est la suite nulle.

$\langle \cdot, \cdot\rangle$ est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E donc est un produit scalaire sur E.

3. Montrer que si $u \in E$ ne s'annule pas, $(1/u_n)_{n\in\mathrm{N}} \notin E$.

Correction

Si $u \in E$, comme la série de terme général u_n^2 converge, $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la série de terme général $\dfrac{1}{u_n^2}$ diverge grossièrement. la suite $(1/u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ n'est donc pas dans E.

4. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $(1/n^\alpha)_{n\in\mathrm{N}} \in E$.

Correction

Par le critère de convergence des séries de Riemann, il faut et il suffit que $\alpha > \dfrac{1}{2}$ pour que la série de terme général $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit dans E.

5. Soit F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que F est un sous-espace de E de dimension infinie. Que dire de $F + F^{\perp}$ et de $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$?

Correction

Soit $u \in F^{\perp}$. Alors pour toute v dans F, $\langle u, v\rangle = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et prenons la suite v nulle tout le temps sauf $v_n = u_n$. Alors $v \in F$ et $\langle u, v\rangle = u_n^2$. Donc $u_n^2 = 0$ donc $u_n = 0$. Ainsi, $F^{\perp} = \{0_E\}$. Donc $(F^{\perp})^{\perp} = E$.

Exercice 12. *Centrale 22*. On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

1. Soit P_{X^3} le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. Avec Python, montrer que le polynôme $X^3 - P_{X^3}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Correction

On propose

```
import numpy as np
import scipy.integrate as integr
from numpy.polynomial import Polynomial



def ps(P,Q):
    def f(t):
        return P(t)*Q(t)
    return integr.quad(f,0,1)[0]

def norme(P):
    return ps(P,P)**(1/2)

P0 = Polynomial([1])
P1 = Polynomial([0,1])
P2 = Polynomial([0,0,1])
P3 = Polynomial([0,0,0,1])

##Orthonormalisation de Gram-Schmidt

E0 = P0/norme(P0)
Q1 = P1 - ps(P1,E0)*E0
E1 = Q1/norme(Q1)
Q2 = P2 - ps(P2,E0)*E0 - ps(P2,E1)*E1
E2 = Q2/norme(Q2)

##On appelle R le projeté de P3

R = ps(P3,E0)*E0 + ps(P3,E1)*E1 + ps(P3,E2)*E2
S = P3 - R
```

On obtient ensuite :

```
>>> S.roots()
```

 nlaillet.math@gmail.com

```
array([0.11270167, 0.5        , 0.88729833])
```

Ainsi, S semble posséder 3 racines distinctes, donc S, qui est de degré 3, est bien scindé à racines simples.

2. Écrire une fonction d'arguments $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, Q \in \mathbb{R}_3[X]$, et renvoie $\lambda_1 Q(y_1) + \lambda_2 Q(y_2) + \lambda_3 Q(y_3)$

Correction

Cette question n'a pas un grand intérêt. On propose

```python
def f(Ly,Llam,Q):
    res = 0
    for i in range(len(Ly)):
        res+= Llam[i]*Q(Ly[i])
    return res
```

3. Déterminer les $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels existe un unique $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant : $\forall Q \in \mathbb{R}_3[X], \displaystyle\int_0^1 Q(t)\mathrm{d}t = \lambda_1 Q(y_1) + \lambda_2 Q(y_2) + \lambda_3 Q(y_3)$

Correction

Cette question est un peu plus difficile qu'elle n'en a l'air :

- Déjà, si (y_1, y_2, y_3) sont deux à deux distincts, un tel triplet λ existe et est unique : on prend $(L_1, L_{2,3})$ la base d'interpolation de Lagrange associée à ces trois points.
  Unicité. Si un tel triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ existe, alors en prenant $Q = L_i$, on obtient $\boxed{\displaystyle\int_0^1 L_i(t)dt = \lambda_i.}$

  Existence. Soit $Q \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors $Q = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} Q(y_i)L_i$, donc

  $$\begin{aligned}\int_0^1 Q(t)dt &= \int_0^1 L_1(t)Q(y_1) + L_2(t)Q(y_2) + L_3(t)Q(y_3)dt \\ &= \lambda_1 Q(y_1) + \lambda_2 Q(y_2) + \lambda_3 Q(y_3),\end{aligned}$$

  où pour tout i, $\lambda_i = \displaystyle\int_0^1 L_i(t)dt$.
- Si les points ne sont pas deux à deux distincts, déjà on n'a pas d'unicité (si $\lambda_2 = \lambda_3$, on peut permuter les valeurs de ces réels). On peut considérer qu'on a répondu à la question. *Je vais aller plus loin pour montrer qu'on peut réfléchir à l'existence.* Recherchons qui peuvent être $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Si ces trois réels existent, alors en évaluant

l'égalité en $1, X, X^2$, on obtient un système que l'on va résoudre par équivalences :

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \\ \lambda_1 y_1+(\lambda_2+\lambda_3)y_2=\dfrac{1}{2} \\ \lambda_1 y_1^2+(\lambda_2+\lambda_3)y_2^2=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \\ \lambda_1 y_1+(\lambda_2+\lambda_3)y_2=\dfrac{1}{2} \\ (\lambda_2+\lambda_3)y_2(y_2-y_1)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}y_1 \ (L_3\leftarrow L_3-y_1L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \\ (\lambda_2+\lambda_3)(y_2-y_1)=\dfrac{1}{2}-y_1 \ (L_2\leftarrow L_2-y_1L_1) \\ (\lambda_2+\lambda_3)y_2(y_2-y_1)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \\ (\lambda_2+\lambda_3)(y_2-y_1)=\dfrac{1}{2}-y_1 \\ 0=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}y_1-\dfrac{y_2}{2}+y_2y_1 \ (L_3\leftarrow L_3-y_2L_2) \end{cases}$$

On en déduit que si $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}y_1-\frac{y_2}{2}+y_2y_1=0$, alors il existe une solution. Si, au contraire, $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}y_1-\frac{y_2}{2}+y_2y_1\neq 0$, il n'existe pas de solution.

- Enfin, si $y_1=y_2=y_3$, alors $Q(X)=(X-y_1)^2$ est d'intégrale non nulle sur $[0,1]$ et pourtant prend les mêmes valeurs en y_1, y_2, y_3 que le polynôme nul, donc un tel triplet $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ n'est pas trouvable.

4. Calculer alors avec Python les coefficients λ_1, λ_2 et λ_3.

Correction

Il faut connaître l'expression des polynômes interpolateurs de Lagrange !

```python
def lagrange(Y):
    n = len(Y)
    res = []
    for i in range(n):
        p = Polynomial([1])
        for j in range(n):
            if j!=i:
                p = p * Polynomial([-Y[j],1])/(Y[i]-Y[j])
        res.append(p)
    return res

def coeflambd(Y):
    return [integr.quad(p,0,1)[0] for p in lagrange(Y)]

def calcint(Y,P):
    co = coeflambd(Y)
    res = 0
```

```python
    for i in range(len(Y)):
        res += co[i]*P(Y[i])
    return res

P = Polynomial([1,2,4.5])
Y = [1,3.5,7]
```

On teste

```python
>>> calcint(Y,P)
3.5000000000000036

>>> integr.quad(P,0,1)[0]
3.5
```

Tout marche bien !

Exercice 13. *Mines PC 24*. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ des réels non nuls. On pose, pour $(P,Q) \in E^2$, $\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\,Q(a_k)$.

1. Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Correction

Déjà, $\langle , \rangle$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- **Symétrie.** Soient P et Q dans E. Alors

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\,Q(a_k) = \sum_{k=0}^{n} Q(a_k)\,P(a_k) = \langle Q,P\rangle$$

- **Bilinéarité.** Soient P, Q et R dans E, λ et μ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle \lambda P + \mu Q, R\rangle &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P + \mu Q)(a_k)\,R(a_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P(a_k) + \mu Q(a_k))R(a_k) \quad \text{par linéarité de l'évaluation} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \lambda P(a_k)R(a_k) + \mu Q(a_k)R(a_k) \\
&= \lambda \sum_{k=0}^{n} P(a_k)R(a_k) + \mu \sum_{k=0}^{n} Q(a_k)R(a_k) \\
&= \lambda \langle P,R\rangle + \mu \langle Q,R\rangle
\end{aligned}$$

  D'où la linéarité par rapport à la première variable et, par symétrie, la bilinéarité.

- **Caractère positif défini.** Soit $P \in E$. Alors

$$\langle P,P\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 \geqslant 0, \text{ d'où la positivité.}$$

De plus, comme $\langle P, P\rangle$ est une somme de réels positifs, si $\langle P, P\rangle = 0$, alors pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, $P(a_k) = 0$, donc P s'annule au moins $n+1$ fois, donc, étant de degré inférieur ou égal à n, on en déduit que $P = 0_E$. D'où le caractère défini.

Ainsi, $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire.

2. Donner une base orthonormée de E.

Correction

Considérons la base d'interpolation de Lagrange $(L_0, \dots, L_n)$ associée aux points $(a_0, \dots, a_n)$. Alors pour tous i et j, $L_i(a_j) = \delta_{ij}$, donc

$$\langle L_i, L_j\rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)L_j(a_k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij},$$

donc $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de E.

3. On pose $H = \left\{P \in E, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et donner sa dimension.

Correction

Déjà, on remarque que $\varphi : P \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(a_k)$ est une forme linéaire sur E (par linéarité de la somme et de l'évaluation). H étant le noyau de cette forme linéaire, c'est un sous-espace vectoriel, plus précisément un hyperplan, de dimension égale à $\dim(E) - 1 = n$.

4. Soit $Q \in E$. Calculer la distance de Q à H.

Correction

On sait que pour un hyperplan H de vecteur normal n, $d(x, H) = |\langle x, n\rangle|$. Or,

$$H = \{P \in E,\ \langle P, U\rangle = 0\},$$

où U est le polynôme constant égal à 1. Mais U n'est pas de norme 1 car $\|U\|^2 = n+1$. Donc

$$d(Q, H) = \frac{|\langle Q, U\rangle|}{\|U\|} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left|\sum_{k=0}^{n} Q(a_k)\right|.$$

Exercice 14. *Centrale 24*. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $u = (a, b, c)^T$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. On note $D = \mathrm{Vect}(u)$ et p la projection orthogonale sur D.

1. Exprimer $p(v)$ pour tout vecteur $v = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$.

Correction

Comme u est unitaire, on sait que pour tout v,

$$p(v) = \langle u, v\rangle\, u = (ax + by + cz) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

2. Exprimer $f \circ f$ en fonction de p.

Correction

$f \circ f$ est représenté par M^2 :

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -c^2 + -b^2 & ab & ac \\ ab & -c^2 - a^2 & bc \\ ac & bc & -a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & ab & ac \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ac & bc & c^2 - 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

il s'agit donc de la matrice de $p - \mathrm{Id}_E$! Donc $f \circ f = p - \mathrm{Id}_E$.

3. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. Montrer que ces deux espaces sont supplémentaires orthogonaux.

Correction

On en déduit que

- $\ker(f^2) = \ker(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(u)$
- $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(p - \mathrm{Id}_E) = \ker(p) = \mathrm{Vect}(u)^\perp$.

On va montrer que ces espaces correspondent aussi à $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Or, on remarque que $\ker(f) \subset \ker(f^2) = \mathrm{Vect}(u)$ et, comme $u \in \ker(f)$ (on le vérifie immédiatement), on en déduit que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(u)$.
Puis on remarque que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)^\perp$. COmme les dimensions de ces deux espaces sont égales (par le théorème du rang), on en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)^\perp$.
Remarque. On aurait pu s'en rendre compte en remarquant que $f(v) = u \wedge v$.

4. Montrer que $f^3 = -f$.

Correction

On en déduit que

$$f^3 = f \circ (p - \mathrm{Id}_E) = f \circ p - f = -f,$$

car $\mathrm{Im}(p) = \ker(f)$.

Exercice 15. *CCINP 24*. Soit $\phi(A, B) = \displaystyle\int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t}dt$ avec$(A, B) \in \mathbb{R}[X]$

1. Montrer que ϕ défini un produit scalaire qu'on notera $(\cdot|\cdot)$ puis que $\left(X^k \mid 1\right) = k!$.

Correction

Le fait qu'il s'agisse d'un produit scalaire a été fait, fait et refait.
Ensuite, on calcule, en faisant une IPP avec $u(t) = t^k$, $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$,

$$\mathrm{I}_k = \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} dt = [-t^k \mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} k t^{k-1} \mathrm{e}^{-t} dt = k\mathrm{I}_{k-1},$$

donc, par récurrence immédiate, et comme $\mathrm{I}_0 = 1$, $\mathrm{I}_k = k!$

2. On pose Q la projection de 1 sur $F = \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^n\right)$, montrer qu'il existe $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tel que $Q = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k X^k$.

Correction

Par définition, $Q \in \mathrm{Vect}(X, \ldots, X^n)$, le résultat s'en déduit immédiatement.

On note $P = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k \prod_{j=1}^k (X + j)$.

3. Calculer $\left(1 - Q|X^i\right)$ et en déduire que $P(i) = 0, \forall i \in [\![1, n]\!]$.

Correction

On sait, par le cours, que $x - p_F(X) \in F^\perp$, donc, en adaptant les notations, on sait que $1 - Q \in \mathrm{Vect}(X, \ldots, X^n)^\perp$, d'où $(1 - Q|X^i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Mais, en calculant,

$$\begin{aligned}
(1 - Q|X^i) &= (1|X^i) - \sum_{k=1}^n a_k (X^k|X^i) \\
&= (1|X^i) - \sum_{k=1}^n a_k (1|X^{k+i}) \\
&= i! - \sum_{k=1}^n a_k (k+i)!
\end{aligned}$$

On en déduit que $i! - \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k (k+i)! = 0$, donc que

$$1 - \sum_{k=1}^n a_k \frac{(k+i)!}{i!} = 0,$$

ou encore que

$$1-\sum_{k=1}^{n}a_k\prod_{j=1}^{k}(i+j)=0,$$

c'est-à-dire que $P(i)=0$.

4. En déduire une expression de P.

Correction

Comme $\deg(P)=n$, et que l'on a trouvé n racines, on sait que $P(X)=C\prod_{i=1}^{n}(X-i)$.

Mais de plus, $P(-1)=1$ donc $C\times(-1)^n(n+1)!=1$, donc $C=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

5. Montrer que $\inf\limits_{(\alpha_1\ldots\alpha_n)}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\ldots+\alpha_n t^n\right)^2 e^{-t}dt=\frac{1}{n+1}$.

Correction

La quantité recherchée est le carré de la distance de 1 à $\mathrm{Vect}(X,\ldots,X^n)$. Cette distance est atteinte en Q, ce qui signifie que la quantité recherchée est $\|1-Q\|^2$. On calcule alors

$$\begin{aligned}\|1-Q\|^2&=\langle 1-Q,1-Q\rangle\\&=\langle 1-Q,1\rangle\ \text{ car } (1-Q)\perp Q\\&=\|1\|-\sum_{k=1}^{n}a_k\left\langle X^k,1\right\rangle\\&=1-\sum_{k=1}^{n}k!a_k\\&=P(0)=\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\times(-1)^n n!=\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré !

Exercice 16. Soient $(e_1,\ldots,e_n)$ n vecteurs unitaires d'un espace euclidien E. Soient $(X_1,\ldots,X_n)$ n variables aléatoires iid de Rademacher, i.e. $\mathbb{P}(X_1=1)=\mathbb{P}(X_1=-1)=\dfrac{1}{2}$.

1. Calculer $\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}X_ie_i\right\|^2\right)$.

Correction

Calculons.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^n X_i e_i\right\|^2\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \|e_i\|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_i X_j \langle e_i, e_j\rangle\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(X_i^2\right) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \langle e_i, e_j\rangle\, \mathbb{E}\left(X_i X_j\right) \text{ par linéarité de l'espérance.}\\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(X_i^2\right) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \langle e_i, e_j\rangle\, \mathbb{E}\left(X_i\right)\mathbb{E}(X_j) \text{ par indépendance.}\\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(X_i^2\right) \text{ car les variables } X_i \text{ sont centrées.}\\
&= n \text{ car } \mathbb{E}(X_i) = 1
\end{aligned}$$

2. En déduire qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tels que $\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i\right\| \leqslant \sqrt{n}$.

Correction

Si on avait

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n,\ \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i\right\| > \sqrt{n},$$

alors on aurait

$$\forall \omega \in \Omega,\ \left\|\sum_{i=1}^n X_i(\omega) e_i\right\|^2 > n,$$

donc

$$\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^n X_i e_i\right\|^2\right) > n,$$

ce qui est absurde par la question précédente ! On en déduit donc qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tels que $\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i\right\| \leqslant \sqrt{n}$.