PSI – Programme de colles
Semaine 04 – du 7 au 11 octobre 2024

Programme en bref

— révisions et prolongements d'algèbre linéaire : le cœur de la colle. Révisions (espaces vectoriels, applications linéaires, matrices, déterminants) + prolongements (sous-espaces stables, somme directe de n espaces, polynômes d'endomorphismes, trace, interpolation de Lagrange, déterminant de Vandermonde)

— (questions de cours seulement) révisions d'algèbre bilinéaire

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. L'application linéaire $P \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n))$ est un isomorphisme.
2. Expression de la base d'interpolation de Lagrange (expression des L_i).
3. Expression de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base de Lagrange.
4. Détermination de $\{P \in \mathbb{K}[X],\ \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(x_i) = y_i\}$.
5. Calcul du déterminant de Vandermonde.

6. Vérification que $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ est bien défini sur $\mathbb{R}[X]$ et est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
7. Une famille de vecteurs orthogonaux non nuls est libre ; une somme de sous-espaces deux à deux orthogonaux est directe.
8. Si u est un vecteur non nul, $\mathrm{Vect}(u) \oplus^{\perp} \mathrm{Vect}(u)^{\perp} = E$
9. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
10. Inégalité triangulaire.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Révisions d'algèbre linéaire

— sous-espaces vectoriels, familles libres/génératrices/bases, cas de la dimension finie.

— applications linéaires, noyau, image, théorème de structure, théorème du rang, projecteurs, symétries, formes linéaires.

— matrices, règles de calcul, application linéaire associée à une matrice, représentation matricielle d'applications linéaires.

Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie. Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.	
En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$.	Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Matrices par blocs et sous-espaces stables	
Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition). Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit. Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v.	Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
c) Trace	
Trace d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{Tr}(A)$.
Linéarité, trace d'une transposée. Relation $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	
d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées	
Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.	Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
Polynôme annulateur.	Application au calcul de l'inverse et des puissances.
Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent.	Le noyau de $P(u)$ est stable par u.
Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.	
e) Interpolation de Lagrange	
Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.	Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1.
Déterminant de Vandermonde.	Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.

Espaces préhilbertiens réels

L'objectif majeur est le théorème de projection orthogonale et l'existence de la meilleure approximation quadratique. On s'appuie sur des exemples de géométrie du plan et de l'espace pour illustrer les différentes notions.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire et norme associée	
Produit scalaire.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$.
Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Exemples de référence :	
produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, produit scalaire défini par une intégrale sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.	Expression $X^\top Y$. Expression $\mathrm{Tr}(A^\top B)$.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	
Norme associée au produit scalaire.	Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Les étudiants doivent savoir manipuler les identités remarquables sur les normes (développement de $\\|u \pm v\\|^2$, identité de polarisation).
b) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel F, d'une partie X.	Notation $F^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore.	

c) Bases orthonormées d'un espace euclidien

Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	