TD 05
Espaces vectoriels normés 1

Exercice 1. On considère, sur $\mathbb{R}[X]$, les 4 normes suivantes : si $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on définit

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{d} |a_k|,\ N_2(P) = \int_0^1 |P(t)|dt,\ N_3(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|.$$

1. Vérifier que les N_i sont des normes.

Correction

Déjà fait en cours (ce sont les normes que l'on a déjà vues).

2. Démontrer que pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$, $N_2(P) \leqslant N_3(P)$.

Correction

Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Alors pour tout t dans $[0,1]$, $|P(t)| \leqslant N_3(P)$.

$$N_2(P) = \int_0^1 |P(t)|dt \leqslant \int_0^1 N_3(P)dt = N_3(P).$$

3. Déterminer la convergence, **dans** $\mathbb{R}[X]$, de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour chacune de ces normes.

Correction

- Supposons que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme 1. Alors on dispose de Q dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $N_1(Q - X^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Notons $Q(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Soit $n > d = \deg(Q)$. Alors
$$N_1(Q - X^n) = \sum_{k=0}^{d} |a_k| + 1 \geqslant 1,$$
donc X^n ne peut pas converger vers Q pour la norme N_1. Donc $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite pour la norme N_1.
- Ensuite,
$$N_2(X^n) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $0_{\mathbb{R}[X]}$ pour N_2.
- Enfin, si on avait $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergeait vers Q pour N_3, alors
$$N_2(X^n - Q) \leqslant N_3(X^n - Q) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Q pour N_2. Mais, par unicité de la limite et l'étape précédente, on en déduit que $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Or,

$$N_3(X^n) = \sup_{t\in[0,1]} |t^n| = 1, \text{ qui ne tend pas vers 0 en } +\infty$$

Donc $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite pour N_3.

4. Les normes N_2 et N_3 sont-elles équivalentes ?

Correction

Les normes N_2 et N_3 ne sont pas équivalentes car la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour N_2 mais pas pour N_3.

On considère ensuite $Q_k = 1$ si $k = 0$ et $Q_k = X^k - 1$ sinon.

5. Démontrer que $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Correction

La famille $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre car à degrés échelonnés. On montre ensuite qu'elle est génératrice. Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une famille libre de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ donc en est une base. Donc $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(Q_0, \dots, Q_n) \subset \mathrm{Vect}(Q_k,\ k \in \mathbb{N})$. Ainsi, tous les $\mathbb{R}_n[X]$ sont dans $\mathrm{Vect}(Q_k,\ k \in \mathbb{N})$, donc $\mathrm{Vect}(Q_k,\ k \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}[X]$.
La famille est donc génératrice, c'est une base de $\mathbb{R}[X]$.

On note, si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $P = \sum_{k=0}^{d} b_k Q_k$, $N_4(P) = \sum_{k=0}^{d} \frac{|b_k|}{2^k}$.

6. Vérifier que l'on définit ainsi une norme.

Correction

Démontrons-le !

- **Positivité.** Déjà, N_4 est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
- **Homogénéité.** Ensuite, doit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{d} b_k Q_k$. Soit λ dans $\mathbb{R}$. Alors $\lambda P = \sum_{k=0}^{d} \lambda b_k Q_k$. Ainsi

$$N_4(\lambda P) = \sum_{k=0}^{d} \frac{|\lambda b_k|}{2^k} = |\lambda| \sum_{k=0}^{d} \frac{|b_k|}{2^k} = |\lambda| N_4(P),$$

d'où l'homogénéité.
- **Séparation.** Avec les mêmes notations que précédemment, si $N_4(P) = 0$, comme $\sum_{k=0}^{d} \frac{|b_k|}{2^k}$ est une somme de réels positifs, on en déduit que pour tout k dans $[\![0, d]\!]$,

 N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

on a $\dfrac{|b_k|}{2^k} = 0$, donc $b_k = 0$. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

- **Inégalité triangulaire.** Soient P et R deux polynômes, notons $P(X) = \sum_{k=0}^{d} b_k Q_k(X)$ et $R(X) = \sum_{k=0}^{d} c_k Q_k(X)$ (en posant $d = \max(\deg(P), \deg(Q))$ et en mettant éventuellement des coefficients nuls pour l'un des deux polynômes). Alors $P + R = \sum_{k=0}^{d} (b_k + c_k) Q_k$. Donc

$$N_4(P+R) = \sum_{k=0}^{d} \frac{|b_k + c_k|}{2^k} \leqslant \sum_{k=0}^{d} \frac{|b_k| + |c_k|}{2^k} = \sum_{k=0}^{d} \frac{|b_k|}{2^k} + \sum_{k=0}^{d} \frac{|c_k|}{2^k} = N_4(P) + N_4(Q).$$

Donc N_4 définit bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

7. Démontrer que la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 pour cette norme.

Correction

Pour $n \geqslant 1$, $X^n - 1 = Q_n$, donc

$$N_4(X^n - 1) = \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 pour la norme N_4.

Exercice 2. *CCINP 2021*. Soit E l'ensemble des fonctions f de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$ on pose $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N'(f) = \|f + f'\|_\infty$.

1. Montrer que N et N' sont des normes sur E.

Correction

La positivité, l'homogénéité, l'inégalité triangulaire sont claires. Vérifions la séparation pour chacune des normes :

- soit $f \in E$ telle que $N(f) = 0$. Alors $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = 0$. En particulier $\|f\|_\infty = 0$ donc, comme $\|\cdot\|_\infty$ est une norme, on en déduit que $f = 0_E$.
- Soit $f \in E$ telle que $N'(f) = 0$. Alors $\|f + f'\|_\infty = 0$. Donc, comme $\|\cdot\|_\infty$ est une norme, $f(t) + f'(t) = 0$ pour tout t dans $[0,1]$, donc on dispose de $C \in \mathbb{R}$ telle que $f(t) = C\mathrm{e}^{-t}$ pour tout t dans $[0,1]$. Mais $f(0) = 0$ donc $C = 0$ et, finalement f est nulle.

2. Montrer que : $\forall f \in E, \forall x \in [0,1], \mathrm{e}^x f(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t \left(f(t) + f'(t)\right) \mathrm{d}t$.

Correction

Soit $f \in E$ et $x \in [0,1]$, notons $g : t \mapsto e^t f(t)$. Alors

$$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)dt = 0 + \int_0^x e^t(f(t) + f'(t))dt.$$

3. Montrer que N et N' sont équivalentes.

Correction

Soit $f \in E$. Déjà, par l'inégalité triangulaire sur $\|\cdot\|_\infty$, on en déduit que

$$N'(f) = \|f + f'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = N(f).$$

Ensuite, soit $x \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| e^{-x} \int_0^x e^t(f(t) + f'(t))dt \right| \\ &\leqslant e^{-x} \int_0^x e^t|f(t) + f'(t)dt \\ &\leqslant e^{-x} \int_0^x e^t N'(f)dt \\ &\leqslant N'(f)e^{-x}[e^t]_0^x \leqslant N'(f). \end{aligned}$$

Ainsi, $\|f\|_\infty \leqslant N'(f)$, et

$$\begin{aligned} N(f) &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \\ &= \|f\|_\infty + \|f' + f - f\|_\infty \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty + \|f' + f\|_\infty \\ &\leqslant 2N'(f) + N'(f) = 3N'(f). \end{aligned}$$

Donc les normes N et N' sont équivalentes.

Exercice 3. *Mines-Ponts 22*. Soit $a \in \mathbb{R}$, pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose : $N_a(P) = |P(a)| + \|P'\|_\infty^{[0,1]}$.

1. Montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Comme toujours, la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont évidentes. Réfléchissons à la séparation.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $N_a(P) = 0$. Alors $|P(a)| + \|P'\|_\infty^{[0,1]} = 0$. Donc

- $\forall t \in [0,1]$, $P'(t) = 0$ donc P' possède une infinité de racines, donc P' est le polynôme nul. On en déduit que P est constant.
- De plus, $|P(a)| = 0$. Le polynôme P étant constant, on en déduit que c'est le polynôme nul.

La séparation est donc prouvée.

2. Montrer que si a et b sont dans $[0,1]$ alors N_a et N_b sont équivalentes.

Correction

Soient a et b dans $[0,1]$, $a < b$. On remarque que

$$P(b) = P(a) + \int_a^b P'(t)dt,$$

donc

$$|P(b)| \leqslant |P(a)| + \int_a^b |P'(t)|dt \leqslant |P(a)| + (b-a)\|P'\|_\infty^{[0,1]} \leqslant |P(a)| + \|P'\|_\infty \leqslant N_a(P).$$

Donc $N_b(P) = |P(b)| + \|P'\|_\infty^{[0,1]} \leqslant 2N_a(P)$. De même, par symétrie des rôles de a et de b, on montre que $N_a(P) \leqslant 2N_b(P)$.
Donc les normes N_a et N_b sont équivalentes.

3. Pour quelles valeurs de a la suite des $P_n = \left(\dfrac{X}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

Correction

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $P_n(a) = \dfrac{a^n}{2^n}$. De plus, $P_n' = n\dfrac{X^{n-1}}{2^n}$, maximum en $X = 1$. donc $\|P_n'\|_\infty^{[0,1]} = \dfrac{n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ensuite,

- si $|a| < 2$, alors $|P_n(a)| = \dfrac{|a|^n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 pour la norme N_a,
- si $|a| > 2$, alors $|P_n(a)| = \dfrac{|a|^n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée pour N_a donc ne peut pas converger,
- si $a = 2$, $|P_n(a)| = \dfrac{|a|^n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc **si** (P_n) converge vers Q, on a nécessairement $N_a(Q) = 1$. On teste $Q(X) = 1$:

$$N_a(P_n - Q) = |P_n(a) - Q(a)| + \|P_n'\|_\infty^{[0,1]} = 0 + \|P_n'\|_\infty^{[0,1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 pour N_a.
Attention ! *Savoir que $N_a(P_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$* **ne permet pas de conclure a priori**. *Il faut trouver un candidat Q et montrer que $N_a(P_n - Q) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

- si $a = -2$, il y a un problème car $P_n(a) = (-1)^n$. On va montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger. Supposons que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors
$$N_a(P_n - Q) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ en particulier } |P_n(a) - Q(a)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc $P_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Q(a)$. Comme $(P_n(a))_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui n'a pas de limite, on en déduit que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Finalement, $\boxed{(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge si et seulement si } a \in]-2, 2].}$ Si $a \in]-2, 2[$, sa limite est 0 ; si $a = 2$, sa limite est 1.

Exercice 4. *Mines-Ponts 24*. Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E.

1. Soit (u_n) une suite qui converge dans (E, N_1). On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes. Montrer que (u_n) converge dans (E, N_2).

Correction

Comme N_1 et N_2 sont équivalentes, on dispose de α et β constantes positives telles que pour tout x dans E, $\alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$. Ainsi, si l'on note ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la norme N_1, on sait que pour tout n dans $\mathbb{N}$,
$$N_2(u_n - \ell) \leqslant \beta N_1(u_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_2.

2. On suppose que pour toute suite (u_n), on a : (u_n) converge dans (E, N_1) si et seulement si (u_n) converge dans (E, N_2). Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Correction

Raisonnons par contraposée. Si N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, alors :
- ou bien pour tout $\alpha > 0$, il existe x dans E tel que $\alpha N_1(x) > N_2(x)$,
- ou bien pour tout $\beta > 0$, il existe x dans E tel que $N_2(x) > \beta N_1(x)$.

Supposons que la première proposition soit vérifiée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prenons $\alpha = \dfrac{1}{n}$. Alors on dispose de u_n dans E tel que $\dfrac{1}{n}N_1(u_n) > N_2(u_n)$, i.e. $N_1(u_n) > nN_2(u_n)$. Considérons alors $v_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{n}N_2(u_n)}$. Alors
- $N_2(v_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$
- $N_1(v_n) > \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour N_2 mais pas pour N_1.
On ferait de même si la seconde proposition était vérifiée.
On en déduit le résultat demandé par contraposée.

3. On prend $E = \mathbb{R}[X]$, $a \in \mathbb{R}$ et $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t$.
Montrer que, si $a, b \in [0, 1]$, N_a et N_b sont équivalentes.

Correction

Soient a et b dans $[0, 1]$, disons $a < b$. Alors on remarque que

$$\begin{aligned}
N_b(P) &= |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \left| P(a) + \int_a^b P'(t)dt \right| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant |P(a)| + \int_a^b |P'(t)|dt + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant |P(a)| + 2\int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2N_a(P).
\end{aligned}$$

On ferait de Même dans l'autre sens et on aurait $N_a(P) \leqslant 2N_b(P)$.

4. Soit, pour $n \in \mathbb{N}, P_n = \dfrac{X^n}{2^n}$. Trouver les valeurs de a telles que (P_n) converge pour N_a et déterminer alors la limite.

Correction

On va distinguer plusieurs cas :

- Si $|a| < 2$, alors

$$N_a(P_n) = \frac{|a|^n}{2^n} + \int_0^1 \frac{n}{2^n} t^{n-1} dt = \frac{|a|^n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

  donc (P_n) converge pour N_a, et sa limite est nulle.
- Si $|a| > 2$, le même raisonnement que précédemment montre que $N_a(P_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc, comme une suite convergente est bornée, (P_n) ne converge pas pour N_a.
- Si $a = 2$, alors

$$N_a(P_n) = 1 + \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

  donc $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On remarque alors que

$$N_a(P_n - 1) = 0 + \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

  donc (P_n) converge pour N_a, vers 1.

- Si $a = -2$, alors quel que soit Q dans $\mathbb{R}[X]$, on a

$$N_a(P_n - Q) \geqslant |P_n(-2) - Q(-2)| = |(-1)^n - Q(-2)|\,,$$

qui ne tend pas vers 0. Donc (P_n) ne converge pas pour N_a.

5. En déduire que N_a et N_b ne sont pas équivalentes si $0 \leqslant a < b$ et $b > 1$.

Correction

Si $0 \leqslant a < b$ et $b > 1$, on pose $P_n(X) = \dfrac{1}{b^n}$. Alors, par le même raisonnement que précédemment (valide car $\dfrac{1}{b^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, voilà pourquoi on avait besoin de $b > 1$), $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 pour N_b mais vers 0 pour N_a, ce qui montre que les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 5. *Mines-Ponts PC 24*. Soit E l'espace des suites complexes bornées. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ on pose $N_1(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ et $N_2(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont bien définis.

Correction

Notons M un majorant de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\frac{|u_n|}{2^n} \leqslant \frac{M}{2^n} \text{ et } \frac{|u_n|}{n!} \leqslant \frac{M}{n!}$$

Comme la série géométrique de terme général $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ converge et la série de l'exponentielle $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout x, on en déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que $\boxed{\text{les séries de termes généraux } \left(\frac{u_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \left(\frac{u_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent.}}$

2. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.

Correction

On ne vérifie que N_1, pour N_2 on fait de même.

- (positivité) déjà, N_1 est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
- (homogénéité) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$N_1(u) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\lambda u_n|}{2^n} = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} = |\lambda| N_1(u),$$

d'où l'homogénéité.

- (séparation) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, vérifiant $N_1(u) = 0$. Alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} = 0,$$
mais, comme pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\frac{|u_n|}{2^n} \geqslant 0$, on en déduit que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\frac{|u_n|}{2^n} = 0$, ce qui signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle. D'où la séparation.
- (inégalité triangulaire) Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E. Alors
$$N_1(u+v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n+v_n|}{2^n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|+|v_n|}{2^n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|v_n|}{2^n} = N_1(u) + N_1(v).$$

3. Montrer qu'il existe une constante C telle que $N_2 \leqslant CN_1$.

Correction

On sait, comme la série de terme général $\frac{2^n}{n!}$ converge, que $\frac{2^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\frac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$, donc, a fortiori, $\frac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{2^n}\right)$. On dispose donc de $C > 0$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{C}{2^n}$. Ainsi, pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E,
$$N_2(u) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{|u_n|}{n!} \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{C.|u_n|}{2^n} = CN_1(u).$$
D'où le résultat attendu.

4. Montrer qu'il n'existe pas de constante positive D telle que $N_1 \leqslant DN_2$.

Correction

Supposons qu'il existe une telle constante D. Alors pour toute $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E, on aurait
$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{|u_n|}{2^n} \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{|u_n|}{n!}.$$
Prenons, pour k dans $\mathbb{N}$, $u^{(k)} = (u_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_n^{(k)} = \delta_{n,k} k!$. Alors $N_1(u^{(k)}) = \frac{k!}{2^k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $N_2(u^{(k)}) = \frac{2^k}{2^k} = 1$, ce qui est en contradiction avec l'existence de D.

Exercice 6. *Mines-Telecom 23.* **1.** Soit N la quantité définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$N(x,y)=\max\left(|y|,\left|x+\frac{y}{2}\right|,|x+y|\right)$$

Démontrer qu'il s'agit d'une norme, et représenter la boule unité pour cette norme.

Correction

Déjà, vérifions qu'il s'agit d'une norme :

- N est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$
- Ensuite, si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}N(\lambda.(x,y)) &= \max\left(|\lambda y|,\left|\lambda x+\frac{\lambda y}{2}\right|,|\lambda x+\lambda y|\right)\\ &= \max\left(|\lambda||y|,|\lambda|\left|x+\frac{y}{2}\right|,|\lambda||x+y|\right)\\ &= |\lambda|\max\left(|y|,\left|x+\frac{y}{2}\right|,|x+y|\right)=|\lambda|N(x,y),\end{aligned}$$

  d'où l'homogénéité.
- Pour la séparation, soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant $N(x,y)=0$. Alors $\max\left(|y|,\left|x+\frac{y}{2}\right|,|x+y|\right)=0$, donc
  - déjà $|y|=0$ donc $y=0$,
  - ensuite $|x+y|=0$ donc $x+y=0$ donc $x=0$.

  Donc $(x,y)=(0,0)$.
- Enfin, pour l'inégalité triangulaire, soient (x,y) et (x',y') dans $\mathbb{R}^2$. On écrit que

$$\begin{aligned}N((x,y)+(x',y')) &= \max\left(|y+y'|,\left|x+x'+\frac{y+y'}{2}\right|,|x+x'+y+y'|\right)\\ &\leqslant \max\left(|y|+|y'|,\left|x+\frac{y}{2}\right|+\left|x'+\frac{y'}{2}\right|,|x+y|+|x'+y'|\right)\end{aligned}$$

  Ensuite, on remarque que $\max(a+b,c+d)\leqslant\max(a,c)+\max(b,d)$. En généralisant à 3 nombres, on en déduit donc que $N((x,y)+(x',y'))\leqslant N(x,y)+N(x',y')$.

Pour déterminer la boule unité, on va transformer cet oral en oral Centrale ! On tape le code

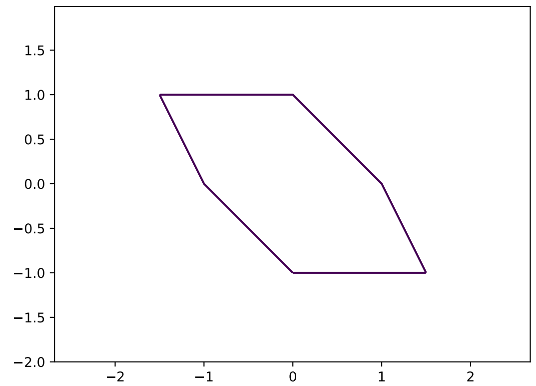
```python
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def f(x,y):
    return max([abs(y),abs(x+y/2),abs(x+y)])
f = np.vectorize(f)

X = np.arange(-2, 2, 0.01)
Y = np.arange(-2, 2, 0.01)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z = f(X, Y)
```

```
plt.axis('equal')
plt.contour(X, Y, Z, [1])
plt.show()
```

et on obtient



Déterminons « à la main » cette boule unité. Soit (x, y) vérifiant $N(x, y) = 1$. Alors

$$\max\left(|y|, \left|x + \frac{y}{2}\right|, |x + y|\right) = 1$$

Donc

- ou bien ce maximum vaut $|y|$, ce qui signifie que $1 = |y| \geqslant \left|x + \frac{y}{2}\right|$ et $|y| \geqslant |x + y|$. Si $y = 1$, on a les équivalences

$$\begin{cases} |y| \geqslant \left|x + \frac{y}{2}\right| \\ |y| \geqslant |x + y| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geqslant \left|x + \frac{1}{2}\right| \\ 1 \geqslant |x + 1| \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geqslant x^2 + x + \frac{1}{4} \\ 1 \geqslant x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - \frac{3}{4} \leqslant 0 \\ x^2 + 2x \leqslant 0 \end{cases}$$

  La première inégalité est vérifiée pour $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$, la seconde pour $x \in [-2, 0]$.
  Finalement, les deux inégalités sont vérifiées pour $x \in \left[-\frac{3}{2}, 0\right]$.
  Si $y = -1$, on a le résultat par symétrie de la boule unité.
- ou bien ce maximum vaut $\left|x + \frac{y}{2}\right|$, donc $\left|x + \frac{y}{2}\right| = 1$, disons $x + \frac{y}{2} = 1$. Alors on

a les équivalences

$$\begin{cases} \left|x+\frac{y}{2}\right| \geqslant |y| \\ \left|x+\frac{y}{2}\right| \geqslant |x+y| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geqslant |y| \\ 1 \geqslant \left|1+\frac{y}{2}\right| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |y| \leqslant 1 \\ \frac{y^2}{4} + y \leqslant 0 \end{cases}$$

Cette inégalité est vérifiée pour $y \in [-1,1] \cap [-4,0] = [-1,0]$. Ainsi, on a un côté de la boule paramétré par $x + \frac{y}{2} = 1$, $y \in [-1,0]$. On a aussi le symétrique de ce segment.

- ou bien ce maximum vaut $|x+y|$. Disons $x+y=1$. Alors on a les équivalences

$$\begin{cases} |x+y| \geqslant |y| \\ |x+y| \geqslant \left|x+\frac{y}{2}\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geqslant |y| \\ 1 \geqslant \left|1-\frac{y}{2}\right| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |y| \leqslant 1 \\ \frac{y^2}{4} - y \leqslant 0 \end{cases}$$

Cette inégalité est vérifiée pour $y \in [-1,1] \cap [0,4] = [0,1]$. Ainsi, on a un côté de la boule paramétré par $x+y=1$, $y \in [0,1]$. On a aussi le symétrique de ce segment.

On obtient au final la boule telle que dessinée par python.

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une famille de formes linéaires sur E. A quelle condition l'application $N : E \to \mathbb{R}_+$qui à x associe $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |\varphi_i(x)|$ est-elle une norme ?

Correction

Déjà, la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire se démontrent comme à la question précédente. Pour le caractère défini, il faut que l'on ait, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$,

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant p} |\varphi_i(x)| \Rightarrow x = 0_E,$$

c'est-à-dire que

$$(\forall i \in [\![1,p]\!],\ \varphi_i(x) = 0) \Rightarrow x = 0_E,$$

ou encore que

$$\bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i) = \{0_E\}.$$

On peut démontrer que cette condition équivaut à

$$(p \geqslant n) \text{ et } \mathrm{rg}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) = n.$$

Je ne sais pas si c'est un attendu ou pas, j'imagine que cela dépendait de comment l'oral se passait.

Exercice 7. *Inégalités de Hölder et de Minkowski*. Soit $p > 1$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on appelle norme p de X le réel positif $\|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Soient $p, q > 1$ deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_p$ vérifie les propriétés de positivité, d'homogénéité et de séparation.

Correction

Déjà, la positivité vient de la définition. Ensuite, si $X \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\|\lambda X\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda|^p |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|\lambda|^p \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|. \|X\|_p .
\end{aligned}$$

2. Démontrer que pour tous réels x et y strictement positifs, $xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

Correction

On sait que la fonction ln est concave, donc

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) = \ln(xy),$$

d'où l'inégalité désirée.

3. (inégalité de Hölder) En déduire que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|X\|_p = \|Y\|_q = 1$, $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant 1$, puis que pour tous X et Y dans $\mathbb{R}^n$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \|X\|_p \|Y\|_q.$$

Correction

Soient X et Y dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\|X\|_p = \|Y\|_q = 1$. Alors

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| &\leqslant \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|^p}{p} + \frac{|y_k|^q}{q} = \frac{1}{p}\|X\|_p^p + \frac{1}{q}\|Y\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|X\|_p \|Y\|_q\end{aligned}$$

Ensuite, pour X et Y quelconques, on pose $X' = \dfrac{1}{\|X\|_p}X$ et $Y' = \dfrac{1}{\|Y\|_q}Y$. Par homogénéité, $\|X'\|_p = \|Y'\|_q = 1$. Puis, si on note $(x'_1, \ldots, x'_n)$ et $(y'_1, \ldots, y'_n)$ les coordonnées respectives de X' et Y', on en déduit, par ce que l'on vient de faire, que

$$\left|\sum_{k=1}^n x'_k y'_k\right| \leqslant 1,$$

donc que

$$\left|\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\|X\|_p} \frac{y_k}{\|Y\|_q}\right| \leqslant 1,$$

d'où

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \|X\|_p \|Y\|_q\,.}$$

4. (inégalité de Minkowski) Démontrer que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$: $\quad \|X+Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p$.
En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
On remarquera que $|x_k + y_k|^p \leqslant |x_k|.|x_k + y_k|^{p-1} + |y_k|.|x_k + y_k|^{p-1}$.

Correction

Soient X et Y dans $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\begin{aligned}\|X+Y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_k + y_k|^p \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_k|.|x_k + y_k|^{p-1} + |y_k|.|x_k + y_k|^{p-1} \\ &\leqslant \|X_k\|^p \left(\sum_{i=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \|Y_k\|^p \left(\sum_{i=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Or, $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{p-1}{p}$ donc $q = \dfrac{p}{p-1}$,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \|X+Y\|^{p-1},\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\|X+Y\|_p^p \leqslant \|X_k\|^p \|X+Y\|^{p-1} + \|Y_k\|^p \|X+Y\|^{p-1},}$$

d'où le résultat en divisant par $\|X+Y\|^{p-1}$. On vient de démontrer que $\|\cdot\|_p$ vérifiait l'inégalité triangulaire, qui est le dernier résultat qui nous manquait.