 nlaillet.math@gmail.com

# TD 05
# Espaces vectoriels normés 1

**Exercice 1.** On considère, sur $\mathbb{R}[X]$, les 4 normes suivantes : si $P(X)=\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on définit

$$N_1(P)=\sum_{k=0}^{d}|a_k|,\ N_2(P)=\int_0^1 |P(t)|dt,\ N_3(P)=\sup_{t\in[0,1]}|P(t)|.$$

**1.** Vérifier que les $N_i$ sont des normes.

**2.** Démontrer que pour tout $P$ dans $\mathbb{R}[X]$, $N_2(P)\leqslant N_3(P)$.

**3.** Déterminer la convergence, **dans** $\mathbb{R}[X]$, de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour chacune de ces normes.

**4.** Les normes $N_2$ et $N_3$ sont-elles équivalentes ?

On considère ensuite $Q_k=1$ si $k=0$ et $Q_k=X^k-1$ sinon.

**5.** Démontrer que $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

On note, si $P\in\mathbb{R}[X]$ et $P=\sum_{k=0}^{d} b_k Q_k$, $N_4(P)=\sum_{k=0}^{d}\frac{|b_k|}{2^k}$.

**6.** Vérifier que l'on définit ainsi une norme.

**7.** Démontrer que la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 pour cette norme.

**Exercice 2.** *CCINP 2021*. Soit $E$ l'ensemble des fonctions $f$ de classe $C^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0)=0$. Pour $f\in E$ on pose $N(f)=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$ et $N'(f)=\|f+f'\|_\infty$.

**1.** Montrer que $N$ et $N'$ sont des normes sur $E$.

**2.** Montrer que : $\forall f\in E, \forall x\in[0,1], \mathrm{e}^x f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^t\left(f(t)+f'(t)\right)\mathrm{d}t$.

**3.** Montrer que $N$ et $N'$ sont équivalentes.

**Exercice 3.** *Mines-Ponts 22*. Soit $a\in\mathbb{R}$, pour $P\in\mathbb{R}[X]$ on pose : $N_a(P)=|P(a)|+\|P'\|_\infty^{[0,1]}$.

**1.** Montrer que $N_a$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

**2.** Montrer que si $a$ et $b$ sont dans $[0,1]$ alors $N_a$ et $N_b$ sont équivalentes.

**3.** Pour quelles valeurs de $a$ la suite des $P_n=\left(\frac{X}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour $N_a$ ?

**Exercice 4.** *Mines-Ponts 24*. Soient $E$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, $N_1$ et $N_2$ deux normes sur $E$.

**1.** Soit $(u_n)$ une suite qui converge dans $(E,N_1)$. On suppose que $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes. Montrer que $(u_n)$ converge dans $(E,N_2)$.

**2.** On suppose que pour toute suite $(u_n)$, on a : $(u_n)$ converge dans $(E,N_1)$ si et seulement si $(u_n)$ converge dans $(E,N_2)$. Montrer que $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes.

**3.** On prend $E=\mathbb{R}[X]$, $a\in\mathbb{R}$ et $N_a(P)=|P(a)|+\int_0^1|P'(t)|\,\mathrm{d}t$. Montrer que, si $a,b\in[0,1]$, $N_a$ et $N_b$ sont équivalentes.

**4.** Soit, pour $n\in\mathbb{N}, P_n=\frac{X^n}{2^n}$. Trouver les valeurs de $a$ telles que $(P_n)$ converge pour $N_a$ et déterminer alors la limite.

 nlaillet.math@gmail.com

**5.** En déduire que $N_a$ et $N_b$ ne sont pas équivalentes si $0 \leqslant a < b$ et $b > 1$.

**Exercice 5.** *Mines-Ponts PC 24*. Soit $E$ l'espace des suites complexes bornées. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ on pose $N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ et $N_2(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$.

**1.** Montrer que $N_1$ et $N_2$ sont bien définis.

**2.** Montrer que $N_1$ et $N_2$ sont des normes sur $E$.

**3.** Montrer qu'il existe une constante $C$ telle que $N_2 \leqslant CN_1$.

**4.** Montrer qu'il n'existe pas de constante positive $D$ telle que $N_1 \leqslant DN_2$.

**Exercice 6.** *Mines-Telecom 23*. **1.** Soit $N$ la quantité définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$N(x, y) = \max\left(|y|, \left|x + \frac{y}{2}\right|, |x + y|\right)$$

Démontrer qu'il s'agit d'une norme, et représenter la boule unité pour cette norme.

**2.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ une famille de formes linéaires sur $E$. A quelle condition l'application $N : E \to \mathbb{R}_+$qui à $x$ associe $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p} |\varphi_i(x)|$ est-elle une norme ?

**Exercice 7.** *Inégalités de Hölder et de Minkowski*. Soit $p > 1$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on appelle norme $p$ de $X$ le réel positif $\|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Soient $p, q > 1$ deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

**1.** Montrer que $\|\cdot\|_p$ vérifie les propriétés de positivité, d'homogénéité et de séparation.

**2.** Démontrer que pour tous réels $x$ et $y$ strictement positifs, $xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

**3.** (inégalité de Hölder) En déduire que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|X\|_p = \|Y\|_q = 1$, $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant 1$, puis que pour tous $X$ et $Y$ dans $\mathbb{R}^n$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \|X\|_p \|Y\|_q.$$

**4.** (inégalité de Minkowski) Démontrer que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ : $\|X + Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p$.
En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
*On remarquera que* $|x_k + y_k|^p \leqslant |x_k|.|x_k + y_k|^{p-1} + |y_k|.|x_k + y_k|^{p-1}$.