Semaine 04 – Colle du lundi 06/10 à 8h

Nom	Énoncé et commentaires	Note
	Planche python. **1.** Montrer qu'une matrice M est de rang 1 si et seulement s'il existe deux vecteurs U et V de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, non nuls, tels que $M = U \times V^\top$. **2.** **[Py]** À l'aide de python, comparer $\det((A+B)(A-B))$ et $\det(A)^2$ pour plusieurs matrices A et B choisies au hasard (à coefficients dans $[0,1]$, utiliser l'aide), A étant quelconques et B étant de rang 1. On fixe maintenant A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, B étant de rang 1. **3.** Dans le cas où $B = E_{11}$ et dans le cas où $B = E_{21}$, démontrer que le résultat est vrai. **4.** Démontrer que toute matrice de rang 1 est semblable ou bien à λE_{11} (avec $\lambda \neq 0$), ou bien à E_{21}. **5.** Conclure.	
	1. **Cours.** Calcul du déterminant de Vandermonde. **2.** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, f qui à $P \in E$ associe Q défini par $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$. Vérifier que f est un endomorphisme et calculer sa trace.	
	1. **Cours.** Une famille de vecteurs orthogonaux est libre ; une somme de sev deux à deux orthogonaux est directe. **2.** Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note M la matrice de terme général a_i^{j-1}. Démontrer que M est inversible et déterminer la première ligne et la première colonne de M^{-1}. **3.** Soient $(a_0, \dots, a_n)$ $n+1$ réels deux à deux distincts. Démontrer que pour tous $(y_0, \dots, y_n)$ et $(z_0, \dots, z_n)$, il existe un unique P dans $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ vérifiant $P(a_0) = y_0, \dots, P(a_n) = y_n$ et $P'(a_0) = z_0, \dots, P'(a_n) = z_n$.	