# Corrections

## exercice 9 :

$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ $\quad F = \{f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ f(x) = 0\}$

$G = \{g \in E,\ \forall x \in [-1,0],\ g(x) = 0\}$.

**1)** mq $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un p.s. sur $E$.

- Symétrie : $\forall (f,g) \in E^2$, $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt = \int_{-1}^{1} g(t)f(t)dt = \langle g, f\rangle$.
- Bilinéarité : $\forall (f, f', g) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\langle \lambda f + f', g\rangle &= \int_{-1}^{1} (\lambda f + f')(t)\, g(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} (\lambda f(t) + f'(t))g(t)\,dt \\ &= \lambda \int_{-1}^{1} f(t)g(t) + \int_{-1}^{1} f'(t)g(t)\,dt \\ &= \lambda \langle f, g\rangle + \langle f', g\rangle.\end{aligned}$$

D'où la linéarité par rapport à la 1ère var, et par symétrie la bilinéarité.

- Positivité : $\forall f \in E$, $\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt \geq 0$.
- Caractère défini :

Soit $f \in E$, tq $\langle f, f\rangle = 0$. Alors $\int_{-1}^{1} f^2(t)dt = 0$.

Or $f^2$ est continue sur $[-1,1]$, positive, d'intégrale nulle : $f = 0_E$.

Ainsi $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est bien un p.s. sur $E$.

**2)** mq $F$ et $G$ sont orthogonaux.

Soit $f \in F$, $g \in G$.

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)g(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)g(t)dt = 0.$$

Donc $F \perp G$ et ils sont en somme directe.

$\boxed{F \oplus^{\perp} G}$

**3)** Soit $h \in F + G$.

On dispose de $f \in F$, $g \in G$ tq $h = f + g$.

Alors $h(0) = f(0) + g(0) = 0$.

Donc $F \oplus G \neq E$ car la décomposition de $0_E$ n'est pas unique.

$(\forall f \in F, \forall g \in G,\ 0_E = f(0) + g(0))$.

**4)** mq $G = F^{\perp}$.

D'après le cours, comme $G \perp F$, $G \subset F^{\perp}$.

Soit $h \in F^{\perp}$, mq $h \in G$, càd $\forall x \in [-1, 0]$, $h(x) = 0$.

On sait que $\forall f \in F$, $\langle h, f\rangle = 0$.

Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 h(x) & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$

**Rmq :** ✗ on ne prend pas $f = h$ car $h \notin F$

✗ —— $f : \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$

car ne permet pas de conclure

Alors $f$ est nulle sur $[0, 1]$ donc $f \in F$.

Et donc $\int_{-1}^{1} fh = 0$, donc $\int_{-1}^{1} x^2 h(x)^2 dx = 0$.

Mais $x \longmapsto x^2 h^2(x)$ est continue, positive, d'intégrale nulle, alors

$\forall x \in [-1, 0[, \quad h^2(x) = 0.$

Par continuité de $h$, $\forall x \in [-1, 0]$, $h(x) = 0$.

Ainsi $\underline{h \in G}$.

D'où l'inclusion réciproque et l'égalité.

- **exercice 8 :**

**1)** On sait que $f(y) = x + y$

$$f(f(y)) = f(x + y) = f(x) + f(y) = f(x) + (x + y) = 2x + y$$

( $\hookrightarrow$ car $x \in \ker(f - Id) \cap \mathrm{Im}(f - Id)$ ).

Par récurrence immédiate,

$$\boxed{f^n(y) = nx + y}$$

**2)** On a d'après **1)** : $x = \dfrac{f^n(y) - y}{n}$.

Donc $\|x\| = \dfrac{\|f^n(y) - y\|}{n} \leqslant \dfrac{\|f^n(y)\| + \|y\|}{n}$

Or $\|f^n(y)\| \leqslant \|f^{n-1}(y)\| \leqslant \dots \leqslant \|y\|$

$$0 \leqslant \|x\| \leqslant \frac{2}{n} \|y\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Donc $\|x\| = 0$.

Donc $\ker(f - Id) \cap \mathrm{Im}(f - Id) = \{0_E\}$

Par thm du rg, on a bien

$$\dim E = \dim(\ker(f - Id)) + \dim(\mathrm{Im}(f - Id))$$

D'où la supplémentarité.

**3)** $x$ quelconque.

On dispose de $(y, z) \in \ker(f - Id) \times \mathrm{Im}(f - Id)$ tq $x = y + z$.

Alors $f^k(x) = y + f^k(z)$, donc

$$\|g_n(x) - y\| = \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) - y \right\|$$
$$= \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (y + f^k(z)) - y \right\|$$

D'où $\|g_n(x) - y\| = \|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(z)\|$.

Or $z \in \mathrm{Im}(f - Id)$, donc on dispose de $w \in E$ tq $f(w) - w = z$

Donc $f^k(z) = f^{k+1}(w) - f^k(w)$.

Donc $\|g_n(x) - y\| = \|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}(w) - f^k(w)\|$

$= \frac{1}{n}\|f^n(w) - w\|$

$\leq \frac{2}{n}\|w\|$ (cf **2)**)

Or $\frac{2}{n}\|w\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc $\boxed{\|g_n(x) - y\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.}$