08/10 # TD04 - Espaces préhilbertiens réels - révisions

exercice 10

1. mq $F \subset (F^\perp)^\perp$

Soit $x \in F$

On a $\forall y \in F^\perp$, $<x, y> = 0$

donc $x \in (F^\perp)^\perp$

2. Pour $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$<P, Q> = \int_0^1 P(t)\, Q(t)\, dt$ et $F = \{P \in E, P(1) = P'(1) = 0\}$

déterminer $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$

Soit $Q \in F^\perp$

On a : $\forall P \in F$, $<P, Q> = 0$

Prenons $P(X) = (1-X)^2 Q(X)$

alors $P(1) = P'(1) = 0$ donc $P \in F$

donc $<P, Q> = 0$

donc $\int_0^1 (1-t)^2\, Q(t)^2\, dt = 0$

$x \mapsto (1-x)^2 Q(x)^2$ est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle :

donc $\forall x \in [0, 1]$, $(1-x)^2 Q^2(x) = 0$

donc pour tout $x \in [0, 1[$,

$Q^2(x) = 0$ donc Q^2 admet une infinité de racines.

donc $Q^2 = 0_{\mathbb{R}[X]}$

$Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$

donc $\boxed{F^\perp = \{0\}}$ donc $\boxed{(F^\perp)^\perp = E} \neq F$

3. Retour au cas général : donner une condition suffisante pour que $F = (F^\perp)^\perp$

Si F est de dim° finie, $F \oplus^\perp F^\perp = E$

donc pour $x \in (F^\perp)^\perp$

On dispose de $(y, z) \in F \times F^\perp$ tq $x = y + z$

Or, $\langle x, z \rangle = 0$

Donc $\langle y, z \rangle + \langle z, z \rangle = 0$

Or, $\langle y, z \rangle = 0$

Donc $\langle z, z \rangle = 0$ ie $z = 0$

donc $x = y$

donc $x \in F$

donc $F = (F^\perp)^\perp$

exercice 6

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et, pour $i \in [\![0,3]\!]$, $L_i = \prod_{k \in [\![0,3]\!] \setminus \{i\}} \frac{X-k}{i-k}$

1. Calculer $L_i(j)$ pour $j \in [\![0,3]\!]$ puis montrer que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base de E

résultat du cours
↳ la démo peut être demandée

d'après le cours : $L_i(j) = \delta_{ij}$
et $(L_0, \dots, L_3)$ est une base

demonstration :

mq $(L_0, \dots, L_3)$ est une base

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$

tel que $\sum_{k=0}^{3} \lambda_k L_k = 0_{\mathbb{R}[X]}$

donc en evaluant en 0, 1, 2 et 3 :

en 0 : $\sum_{k=0}^{3} \lambda_k L_k(0) = 0$

$\lambda_0 \underbrace{L(0)}_{\neq 0} = 0$ donc $\lambda_0 = 0$

en réiterant pour le reste, on obtient que $(\lambda_0, \dots, \lambda_3) = (0, \dots, 0)$ donc la famille est libre

donc $(L_0, \dots, L_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

car card $(L_0, \dots, L_3) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$

2. Mq $(P,Q) \longmapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{3} (P(k) + P(k+1))(Q(k) + Q(k+1))$ définit un produit scalaire sur E

- bilinéarité et symetrie evidentes

• caractère défini

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$:

alors $\langle P, P\rangle = \sum_{k=0}^{3} (P(k) + P(k+1))^2 \geq 0$

→ si $\langle P, P\rangle = 0$

alors on veut mq $P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$

d'après 1+ cours, on a $P(X) = \sum_{k=0}^{3} P(k) L_k$

de $\langle P, P\rangle = 0$, on déduit que :

$$\begin{cases} P(0) + P(1) = 0 \\ P(1) + P(2) = 0 \\ P(2) + P(3) = 0 \\ P(3) + P(4) = 0 \end{cases}$$

• cas 1 : Si $P(k=0)$, $k \in [\![0, 4]\!]$

donc, par le système,

on a $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$

donc P a 5 racines or $P \in \mathbb{R}_3[X]$

donc $P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$

• cas 2 : P est continue ~~sur~~ $\mathbb{R}$ et change de signe

entre k et $k+1$ ($k \in [\![0, 3]\!]$) (car $P(k) = -P(k+1)$)

donc par le TVI, P s'annule sur

$]0,1[$, $]1,2[$, $]2,3[$ et $]3,4[$

donc P s'annule au moins 4 fois

donc $P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$

3. Trouver une base orthonormée pour ce produit scalaire

orthogonalisation de G.S. :

Soit la base (L_0, L_1, L_2, L_3),

d'après l'algorithme, on pose $P_0 = L_0$

$$\|P_0\|^2 = \sum_{k=0}^{3} (P_0(k) + P_0(k+1))^2 = L_0(0)^2 + L_0(4)^2$$
$$= 1 + L_0(4)^2$$
$$= 2$$

$$L_0(4) = \prod_{k \in [\![0,3]\!] \setminus \{0\}} \frac{4-k}{-k}$$

$$= \frac{3 \times 2 \times 1}{(-1) \times (-2) \times (-3)}$$

$$= -1$$

$$P_1 = L_1 - \frac{\langle L_1, P_0 \rangle P_0}{\| P_0 \|^2}$$

avec $\langle L_1, P_0 \rangle = \langle L_1, L_0 \rangle$

$$= \sum_{k=0}^{3} (L_1(k) + L_1(k+1))(L_0(k) + L_0(k+1))$$

$$= L_1(1) L_0(0) + L_1(4) L_0(4)$$

$$= 1 - L_1(4) = 4$$

or $L_1(4) = \dfrac{3 \times 2 \times (-1)}{1 \times (-1) \times (-2)} = -3$

on continue ainsi