PSI – Programme de colles
Semaine 05 – du 14 au 18 octobre 2024

Programme en bref Révisions d'algèbre bilinéaire : produit scalaire, distance, bases orthonormées, projecteurs orthogonaux, Gram-Schmidt.

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. Vérification que $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est bien défini sur $\mathbb{R}[X]$ et est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Une famille de vecteurs orthogonaux non nuls est libre ; une somme de sous-espaces deux à deux orthogonaux est directe.
3. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. Inégalité triangulaire.
5. Expression d'un vecteur dans une BON (écriture et démonstration), expression du coefficient de la matrice d'un endomorphisme dans une BON.
6. Pour un sevdf F et $F^\perp$ sont supplémentaires.
7. La distance à un sevdf est atteinte en le projeté orthogonal.
8. Théorème de représentation des formes linéaires.
9. Procédé d'ortho**gonalisation** de Gram-Schmidt : description de l'algorithme, application à l'orthogonalisation puis orthonormalisation de $(1, X, X^2)$ pour $\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$. <u>Ne pas demander la preuve de Gram-Schmidt.</u>

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Espaces préhilbertiens réels

L'objectif majeur est le théorème de projection orthogonale et l'existence de la meilleure approximation quadratique. On s'appuie sur des exemples de géométrie du plan et de l'espace pour illustrer les différentes notions.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire et norme associée	
Produit scalaire. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Exemples de référence : produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produit scalaire défini par une intégrale sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Norme associée au produit scalaire.	Notations $\langle x,y\rangle$, $(x\|y)$, $x\cdot y$. Expression $X^\top Y$. Expression $\mathrm{Tr}(A^\top B)$. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Les étudiants doivent savoir manipuler les identités remarquables sur les normes (développement de $\\|u\pm v\\|^2$, identité de polarisation).
b) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel F, d'une partie X. Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	Notation $F^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel.
c) Bases orthonormées d'un espace euclidien	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	

d) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.	Dimension de $F^{\perp}$ en dimension finie.
Projection orthogonale p_F sur un sous-espace vectoriel F de dimension finie.	Les étudiants doivent savoir déterminer $p_F(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormée de F ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de F.
Distance d'un vecteur à un sous-espace. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	Notation $d(x, F)$.
Projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$; distance entre x et $\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$.	Application géométrique à des calculs de distances.

e) Formes linéaires sur un espace euclidien

Représentation d'une forme linéaire à l'aide d'un produit scalaire.	Vecteur normal à un hyperplan.