PSI – Mathématiques
DS 02 – corrigé

Problème 1. Une série de déterminants – E3A PC 2012

1. On calcule

$$(1+\alpha)(1+\beta) = 1+\alpha+\beta+\alpha\beta \geqslant 1+\alpha+\beta.$$

2. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_1 v_1$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2 v_2 - u_1 \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2 v_2 - u_1(-v_1) = 1 + u_2 v_2 + u_1 v_1$$

par développement par rapport à la première colonne

3. Développons Δ_n par rapport à sa dernière ligne :

$$\Delta_n = (-1)^{n+1+n} u_n \begin{vmatrix} & & 0 \\ & \Delta_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & -v_n \end{vmatrix} + \Delta_{n-1}$$

Puis par développement par rapport à la dernière ligne,

$$\Delta_n = u_n v_n \Delta_{n-2} + \Delta_{n-1}$$

4. Déjà, on montre par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \geqslant 0$.
Initialisation. La relation est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ puisque Δ_1 et Δ_2 sont des sommes de termes positifs.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, supposons $\Delta_{n-2} \geqslant 0$ et $\Delta_{n-1} \geqslant 0$. Alors Alors, puisque $a_n \geqslant 0, \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2} \geqslant 0$, d'où l'hérédité et le résultat.
On en déduit que pour tout $n \geqslant 3$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n \Delta_{n-2} \geqslant 0$, par positivité de a_n, donc $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît.

5. On montre par récurrence double la proposition $\Delta_n \leqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$.
L'**initialisation est vraie** : on a l'égalité pour $n = 1$ et $\Delta_2 = 1 + u_2 v_2 + u_1 v_1 \leqslant (1+a_1)(1+a_2)$ par la question préliminaire.

Hérédité. Soit $n \geqslant 3$. Supposons la relation vérifiée aux rangs $n-1$ et $n-2$. Alors

$$\begin{aligned}\Delta_n &\leqslant \prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k) + a_n \prod_{k=1}^{n-2}(1+a_k)\\ &= \prod_{k=1}^{n-2}(1+a_k)(1+a_{n-1}+a_n)\\ &\leqslant \prod_{k=1}^{n-2}(1+a_k)(1+a_{n-1})(1+a_n) \text{ par la question préliminaire}\\ &= \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\end{aligned}$$

D'où l'hérédité et le résultat.

6. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est clairement strictement positif. On peut donc considérer la suite $(\ln P_n)_n$.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \ln P_n = S_n$.
Mais, on sait que

$$\ln(1+a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$$

et que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\ln(1+a_n)$ converge, donc $(S_n)_n$ converge donc $(\ln P_n)_n$ converge.
On en déduit que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(b) La suite $(P_n)_n$ converge, elle est donc majorée. L'inégalité du 5 nous montre ainsi que $(\Delta_n)_n$ est majorée. Étant croissante et majorée, elle converge alors.

7. (a) On sait que $\Delta_1 \geqslant 1$ et que $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croît. Le résultat s'ensuit immédiatement.

(b) Comme la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, la série de terme général $\Delta_n - \Delta_{n-1}$ converge aussi.

(c) On en déduit que $0 \leqslant a_n \leqslant a_n\Delta_{n-2} \leqslant \Delta_n - \Delta_{n-1}$, donc la série de terme général (a_n) converge, par comparaison de séries à termes positifs.

8. On a démontrer que la série de terme général a_n converge si et seulement si la suite (Δ_n) converge.

Problème 2. Opérateurs de $\mathbb{R}[X]$ – Centrale PC 2016

I. L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I-A. L'opérateur de translation

I-A.1) Écrivons $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $d = \deg(P)$, i.e. $a_d \neq 0$. Alors

$$\tau(P)(X) = P(X+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j$$
$$= \sum_{k=0}^{d} \sum_{j=0}^{k} a_k \binom{k}{j} X^j = \sum_{j=0}^{d} \sum_{k=j}^{d} a_k \binom{k}{j} X^j = \sum_{j=0}^{d} \left(\sum_{k=j}^{d} a_k \binom{k}{j} \right) X^j,$$

le monôme de degré d est $\left(\sum_{k=d}^{d} a_k \binom{k}{j} \right) X^d = a_d X^d$, non nul, donc $\deg(\tau(P)) = \deg(P)$ et $\mathrm{cd}(\tau(P)) = \mathrm{cd}(P)$.

I-A.2) On remarque que $\tau^2(P) = \tau(\tau(P)) = \tau(P(X+1)) = P(X+2)$, donc, par une récurrence immédiate (à faire, même succinctement, c'est la première récurrence du problème), $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$.

I-A.3) Soit $j \in [\![1, n+1]\!]$. Alors

$$\tau(P_j)(X) = (X+1)^{j-1}$$
$$= \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} P_{i+1} = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} P_i = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{j-1}{i-1} P_i,$$

en posant $\binom{b}{a} = 0$ si $a > b$. Donc $M_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$.

I-A.5) L'application τ est clairement bijective, de bijection réciproque

$$\tau^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X-1) \end{cases}$$

Cette application est bien linéaire, c'est bien un endomorphisme.
On a alors $(\tau^{-1})^k = P(X-k)$ par récurrence immédiate, donc la formule trouvée précédemment est toujours valable.

I-A.6) M^{-1} est alors la matrice de τ^{-1} dans la base $(P_1, \dots, P_{n+1})$. Or, si $j \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\begin{aligned}\tau^{-1}(P_j)(X) &= (X-1)^{j-1}\\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} (-1)^{j-1-i} X^i\\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} (-1)^{j-1-i} P_{i+1}\\ &= \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} P_i\\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i,\end{aligned}$$

donc le coefficient (i,j) de M^{-1} est $(-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}$.

I-A.7) Encore une fois, on utilise le fait que si $j > k$, $\binom{k}{j} = 0$ pour écrire que si $Q = Q_{ij}$, alors pour tout k, $v_k = \sum_{j=0}^{n} Q_{kj} u_j$. Donc $Q_{ij} = \binom{i}{j}$ (avec la convention $\binom{i}{j} = 0$ si $j > i$). Donc pour tout i, j, $Q_{ij} = \binom{i}{j}$, donc $(Q_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} = (M_{ji})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$. Donc $Q = M^T$.

I-A.8) On en déduit que $Q^{-1} = (M^{-1})^\top$, et donc que si $(i,j) \in [\![0, n]\!]^2$, le coefficient (i,j) de Q^{-1} est $(-1)^{i-j}\binom{i}{j}$, d'où $u = Q^{-1}v$, i.e.

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j.$$

I-A.9) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k.$$

Donc $(v_k) = ((\lambda+1)^k)$. Or, si $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (1+\lambda)^j = (1+\lambda-1)^k = u_k,$$

donc la formule d'inversion est bien vérifiée !

I-B. L'opérateur de différence

I-B.1) On réutilise l'expression de la première question : si $P(X) = \sum_{j=0}^{d} s_j X^j$, alors

$$\delta(X) = P(X+1) - P(X) = \sum_{j=0}^{d} \left(\sum_{k=j}^{d} a_k \binom{k}{j} \right) X^j - \sum_{j=0}^{d} s_j X^j = \sum_{j=0}^{d} \left(\sum_{k=j}^{d} a_k \binom{k}{j} - 1 \right) X^j,$$

donc le monôme de degré d est $\left(\sum_{k=d}^{d} a_k \binom{k}{d} - a_d\right) X^j = 0$, et le monôme de degré $d-1$ est $\left(\sum_{k=d-1}^{d} a_k \binom{k}{d-1} - a_{d-1}\right) X^{d-1} = (da_d + a_{d-1} - a_{d-1})X^{d-1} = da_d X^{d-1}$. Don $\delta(P)$ est nul si $d = 0$ i.e. P est constant et de degré $\deg(P) - 1$, de coefficient dominant $\deg(P)\mathrm{cd}(P)$ sinon.

I-B.2) On en déduit que $\mathbb{R}_0[X] \subset \ker(\delta)$ et $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathrm{Im}(\delta)$. Or, $\dim(\ker\delta) + \mathrm{rg}(\delta) = n+1$, et $\dim(\ker(\delta)) \leqslant 1$, donc $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) \geqslant n+1-1 = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$, donc $\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De même $\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$.

I-B.3) Montrons par récurrence sur j que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, si $\deg(P) < j$, $\delta^j(P) = 0$ et si $\deg(P) \geqslant j$, $\deg(\delta^j(P)) = \deg(P) - j$.
Initialisation. Déjà démontré.
Hérédité. Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Si $\deg(P) < j$, alors $\delta^j(P) = 0$ donc $\delta \circ \delta^j(P) = 0$. Si $\deg(P) = j$, $\delta^j(P)$ est de degré nul, donc $\delta(\delta^j(P)) = 0$. Enfin, si $\deg(P) \geqslant j+1$, $\deg \delta^j(P) = \deg(P) - j$, donc $\deg \delta(\delta^j(P)) = \deg(P) - j - 1 = \deg(P) - (j+1)$. D'où le résultat.
On déduit de la proposition que pour tout j, $\mathbb{R}_{j-1}[X] \subset \ker(\delta^j)$ et que $\mathbb{R}_{n-j}[X] \subset \mathrm{Im}(\delta^j)$. Par le même argument de dimensions que la question précédente, on a égalité : $\mathbb{R}_{j-1}[X] = \ker(\delta^j)$ et que $\mathbb{R}_{n-j}[X] = \mathrm{Im}(\delta^j)$.

I-B.4) On a $\delta = \tau - \mathrm{Id}$. Or, comme τ et Id commutent, $\delta^k = (\tau - \mathrm{Id})^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \tau^j$.

I-B.5) On sait par la question I.B.3) que $\ker\delta^n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc pour tout P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\delta^n(P) = 0$, donc pour tout P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \tau^j(P) = 0,$$

donc $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j) = 0$, donc, en évaluant en 0,

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(j) = 0$$

I-B.6)
a) $u \circ \delta^2 = u \circ (u \circ u)^2 = (u \circ u)^2 \circ u = \delta \circ u$.
b) Soient f et g tels que $f \circ g = g \circ f$. Soit $x \in \ker(g)$. Alors $g(f(x)) = f(g(x)) = f(0) = 0$, donc $f(x) \in \ker(g)$. Donc $\ker(g)$ est stable par f.
c) $\ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$ et u et δ^2 commutent, donc $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u.
d) Supposons qu'il existe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tel que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$a^2 + bc = 0, ab + bd = 1, ca + dc = 0, cb + d^2 = 0.$$

Par la première et la dernière équation, $a^2 = d^2$, donc $a = d$ ou $a = -d$
Si $a = d$, $ab + ba = 1$, donc $2ab = 1$, et $2ac = 0$, donc $a = 0$ ou $c = 0$. Comme $2ab = 1$, $c = 0$. Or, $a^2 + bc = 0$, donc $a^2 = 0$, donc $a = 0$, absurde !
Si $a = -d$, $ab + bd = ab - bd = 0$, absurde.
Il n'existe donc pas de A telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

e) S'il existait u tel que $u^2 = \delta$, alors u stabiliserait $\mathbb{R}_1[X]$. Soit v la restriction de u à $\mathbb{R}_1[X]$. Soit A la matrice de v dans la base $(1, X)$. Alors $v^2 = \delta$, donc $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, absurde !

I-B.7) a) Si P est de degré d, $\delta(P)$ est de degré $d-1$, etc. , $\delta^d(P)$ est de degré 0. Donc la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés, elle est donc libre. C'est une famille de $d+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_d[X]$ qui est de dimension $d+1$, elle engendre donc $\mathbb{R}_d[X]$.

b) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ. Soit P un polynôme de degré maximal d dans V. Alors $V \subset \mathbb{R}_d[X]$ et, $P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)$ sont tous dans V par stabilité par δ. Donc $\mathrm{Vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)) \subset V$, donc, par la question précédente, $\mathbb{R}_d[X] \subset V$. Donc $V = \mathbb{R}_d[X]$.

III. Étude d'une famille de polynômes

III-A. Généralités

III-A.1) On remarque que pour tout entier naturel $k \in [\![1, n]\!]$, $\deg(H_k) = k$. Donc la famille (H_k) est une famille de polynômes à degrés échelonnés, donc c'est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$, de cardinal $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, c'en est donc une base.

III-A.2) $\delta(H_0) = 0$ car H_0 est constant. Ensuite, si $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\delta(H_k) &= H_k(X+1) - H_k(X) \\
&= \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j) \\
&= \frac{1}{k!}(X+1)\prod_{j=0}^{k-2}(X-k) - \frac{1}{k!}(X-(k-1))\prod_{j=0}^{k-2}(X-j) \\
&= \left(\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-k)\right) \times (X+1-X+k-1) \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-k) = H_{k-1}
\end{aligned}$$

III-A.3) On en déduit que $\tau(H_0) = H_0$ et que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\tau(H_k) = \mathrm{Id}(H_k) + \delta(H_k) = H_k + H_{k-1}$. Donc la matrice de τ dans la base (H_k) est M', donc M' est semblable à M car elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

III-A.4) Soient $k, \ell \in [\![0, n]\!]$. Par une récurrence immédiate, il vient :

- si $\ell < k$, $\delta^k(H_\ell) = 0$. Donc $\delta^k(H_\ell)(0) = 0$.

- si $\ell = k$, $\delta^k(H_\ell) = H_0 = 1$, donc $\delta^k(H_\ell)(0) = 1$.
- si $\ell > k$, $\delta^k(H_\ell) = H_{\ell-k}$. Or, si $\ell - k > 0$, 0 est racine de $H_{\ell-k}$, donc $\delta^k(H_\ell)(0) = 0$.

Le résultat est donc montré.

III-A.5) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on dispose de $a_0, \dots, a_n$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k$. Alors si $\ell \in [\![0, n]\!]$, $\delta^l(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta^\ell(H_k)$. En particulier,

$$\delta^l(P)(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta^\ell(H_k)(0) = a_\ell,$$

par la question précédente. D'où, pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$, $a_\ell = \delta^\ell(P)(0)$. D'où

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k = P = \sum_{k=0}^{n} \delta^k(P)(0) H_k.$$

III-B. Étude d'un exemple

III-B.1) Posons $Q(X) = X^3+2X^2+5X+7$. Alors $Q = a_0H_0+a_1H_1+a_2H_2+a_3H_3$, avec $a_k = \delta^k(Q)(0)$. Ainsi

- $a_0 = \delta^0(Q)(0) = Q(0) = 7$
- $a_1 = \delta(Q)(0) = Q(1) - Q(0) = 8$
- $a_2 = \delta^2(Q)(0) = Q(2) - 2Q(1) + Q(0) = 33 - 2 \times 15 + 7 = 10$
- $a_3 = \delta^3(Q)(0) = Q(3) - 3Q(2) + 3Q(1) - Q(0) = 67 - 99 + 45 - 7 = 6$.

Donc $\boxed{Q = 7H_0 + 8H_1 + 10H_2 + 6H_3}$.

III-B.2) Puisque $\delta^2(H_k) = H_{k-2}$, alors par linéarité :

$$\text{si } P = 6\mathrm{H}_5 + 10\mathrm{H}_4 + 8\mathrm{H}_3 + 7\mathrm{H}_2, \text{ on a } \delta^2(P) = 6\mathrm{H}_3 + 10\mathrm{H}_2 + 8\mathrm{H}_1 + 7\mathrm{H}_0$$

III-B.3) On va utiliser le théorème de structure. Considérons (p_n) une solution particulière.
Toute autre solution (u_n) vérifie :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, (u-p)_{k+2} - 2(u-p)_{k+1} + (u-p)_k &= (u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k) - (p_{k+2} - 2p_{k+1} + p_k) \\ &= \left(k^3 + 2k^2 + 5k + 7\right) - \left(k^3 + 2k^2 + 5k + 7\right) = 0\end{aligned}$$

Donc la suite $(u-p)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$, et il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = p_n + (A + Bn)1^n$

Reste à trouver une solution paticulière. On a vu que $\delta^2(P)(X) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$. Avec P tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \delta^2(P)(k) = k^3+2k^2+5k+7$ et $p_k = P(k)$, on a une solution particulière. Enfin, comme pour $k \geqslant h$, $H_h(k) = \frac{1}{h!}k(k-1)\dots\Big(k-(h-1) = \frac{1}{h!} \times \frac{k!}{(k-h)!} = \binom{k}{h}$, et pour $k < h$, $H_k(h) = 0$; on a il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}, u_k = A + Bk + 6\binom{k}{5} + 10\binom{k}{4} + 8\binom{k}{3} + 7\binom{k}{2}$ avec convention : $\binom{k}{h} = 0$ si $h > k$

III-C. Polynômes à valeurs entières

III-C.1) • Supposons $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors k est racine de H_n, donc $H_n(k) = 0$.

• Supposons $k \geqslant n$. Alors

$$H_n(k) = \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(k-j) = \frac{k(k-1)\dots(k-(n-1))}{n!} = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \binom{k}{n}.$$

• Supposons $k \leqslant 0$. Posons $p = -k$. Alors

$$\begin{aligned} H_n(k) &= \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(-p-j) = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(p+j) \\ &= (-1)^n\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} \\ &= (-1)^n\frac{(p+n-1)!}{n!(p-1)!} = (-1)^n\binom{p+n-1}{n} = (-1)^n\binom{n-1-k}{n}. \end{aligned}$$

III-C.2) Comme un coefficient binomial est un entier, on a, dans tous les cas, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.

III-C.3) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors $\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k)$. $P(k+1)$ et $P(k)$ sont entiers, leur différence l'est aussi. Donc $\delta(P)(k) \in \mathbb{Z}$.

III-C.4) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons P à valeurs entières sur les entiers. On sait que $P = \sum_{k=0}^{n} \delta^k(P)(0)H_k$. Par une récurrence immédiate, $\delta^k(P)$ est à valeurs entières sur les entiers, donc $\delta^k(P)(0)$ est entier. Donc P est à coordonnées entières sur la base $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k$ avec pour tout k $a_k \in \mathbb{Z}$. Alors si $\ell \in \mathbb{Z}$, $P(\ell) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(\ell)$ est une somme de produits d'entiers, et est donc entier.

III-C.5) Comme P est à valeurs entières sur les entiers, on dispose de $a_0, \dots, a_d$ entiers tels que

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k H_k = \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k}(X-j),$$

donc

$$d!P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k (d-k)! \prod_{j=0}^{k}(X-j),$$

polynôme à coefficients entiers.

La réciproque est ultra-fausse avec $P(X) = \frac{1}{d!}X^d$.