

PSI

Mathématiques DS 02

Vendredi 11 octobre – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le soin et la présentation seront pris en compte dans la notation. **Mettez en valeur vos résultats et numérotez vos pages.**
- Le **correcteur blanc** (liquide ou en ruban) est **interdit** : toute utilisation entraînera une non-correction de la question.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir et pour y mettre les numéros des questions.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice ou de partie.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.

♪ Bon courage! ♪

Problème 1. Une série de déterminants

1. **Question préliminaire** : Soient α et β deux réels strictement positifs. Vérifier que :

$$(1 + \alpha)(1 + \beta) \geq (1 + \alpha + \beta).$$

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.

On pose : $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix}$ et pour $n \geq 3$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

et on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n v_n$.

2. Calculer Δ_1 et Δ_2 .
3. Démontrer que :

$$\forall n \geq 3, \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}$$

4. Prouver que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_n \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$$

On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$, $S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + a_k)$ et on suppose dans cette question que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

- (a) Prouver que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- (b) Que peut-on en déduire pour la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

7. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

- (a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \geq 1$.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, on pose $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$. Étudier la nature de la série : $\sum_{n \geq 2} t_n$.

- (c) Prouver alors que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

8. Quel résultat a-t-on finalement établi ?

Problème 2. Opérateurs de $\mathbb{R}[X]$

NB. Si certains numéros de questions ou certaines parties manquent, c'est normal ! J'ai sélectionné.

Dans tout le texte, \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{R} l'ensemble des réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n .

Pour $a < b$ dans \mathbb{Z} , on note $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1} . On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\text{cd}(P)$ désigne le coefficient dominant de P , c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, le coefficient binomial $\binom{k}{j}$ vaut $\frac{k!}{j!(k-j)!}$.

Pour un ensemble E et $f : E \rightarrow E$, on définit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ l'application $f^k : E \rightarrow E$ de la façon suivante :

$$f^0 = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p .

I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A – L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) \end{cases}$$

I.A.1) Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\text{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\text{cd}(P)$.

I.A.2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P .

I.A.3) Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j .

I.A.5) L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1} . L'expression de τ^j trouvée à la question I.A.2 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?

I.A.6) Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j .

I.A.7) On se donne une suite réelle $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et on définit pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j \tag{I.1}$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

I.A.8) En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \quad (\text{I.2})$$

I.A.9) On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la formule (I.1) ? Vérifier alors la formule (I.2).

I.B – L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\delta : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

I.B.1) Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\text{cd}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\text{cd}(P)$.

I.B.2) En déduire le noyau $\ker(\delta)$ et l'image $\text{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ .

I.B.3) Plus généralement, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer les égalités suivantes :

$$\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \quad \text{et} \quad \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \quad (\text{I.3})$$

I.B.4) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$.

I.B.5) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \quad (\text{I.4})$$

I.B.6) Dans cette question, on se propose de montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.

a) Montrer que u et δ^2 commutent.

b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u .

c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Conclure.

I.B.7) Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ .

a) Pour un polynôme non nul P de degré $d \leq n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

III Étude d'une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X - j) \quad \text{pour } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{cases}$$

III.A – Généralités

III.A.1) Montrer que la famille $(H_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.A.2) Calculer $\delta(H_0)$ et, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer $\delta(H_k)$ à l'aide de H_{k-1} .

III.A.3) La matrice M définie à la question I.A.3 et la matrice M' de taille $n + 1$ donnée par

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

III.A.4) Montrer que, pour $k, l \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\delta^k(H_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

III.A.5) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^n (\delta^k(P))(0) H_k$$

III.B – Étude d'un exemple

III.B.1) Donner les coordonnées du polynôme $X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.

III.B.2) En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que

$$\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$$

III.B.3) Déterminer les suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que

$$u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7 \quad (k \in \mathbb{N})$$

III.C – Polynômes à valeurs entières

III.C.1) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $k \geq n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.

III.C.2) En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.

III.C.3) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

III.C.4) Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ sont entières.

III.C.5) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers alors $d!P$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.