 nlaillet.math@gmail.com

Semaine 05 – Colle du lundi 14/10 à 8h

<table>
<tr><th>Nom</th><th>Énoncé et commentaires</th><th>Note</th></tr>
<tr><td></td><td>

Python. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On définit un produit scalaire sur E en posant, pour $(f,g) \in E^2$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$. On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $e_k : t \mapsto t^k$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $V_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

1. Pour V sous-espace de dimension finie de E et $x \in E$, on pose $d(x,V) = \inf_{v \in V} \|x - v\|$. Montrer que $d(x,V) = \|x - p_V(x)\|$ où p_V est la projection orthogonale sur V.
2. Montrer que $d(e_0, V_3)^2 = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 \left(1 + at + bt^2 + ct^3\right)^2 dt$.
3. **[Py]** On pose $\mathrm{I}(a,b,c) = \int_0^1 \left(1 + at + bt^2 + ct^3\right)^2 dt$. Écrire une fonction python calculant $\mathrm{I}(a,b,c)$. Calculer numériquement $d(e_0, V_3)$.
4. **[Py]** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $p_{V_n}(e_0) = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$. Écrire une fonction python calculant $(a_1, \dots, a_n)$. Écrire une fonction python calculant $d(e_0, V_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$
5. Montrer que $\det\left(\left(\langle e_i, e_j\rangle\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}\right) = d(e_0, V_n)^2 \det\left(\left(\langle e_i, e_j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)$
6. En déduire la valeur de $d(e_0, V_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

1. **Cours.** Distance à un sevdf.
2. Soient E un espace vectoriel euclidien, et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux. Démontrer l'équivalence entre :
   (a) $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$;
   (b) Pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|q(x)\|$.

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

1. **Cours.** F et $F^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux lorsque F est un sevdf.
2. Soit E euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de E. Soit F un sev de E et $\mathscr{C} = (u_1, \dots u_p)$ une BON de F. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F) = \sum_{k=1}^{p} U_k \cdot U_k^\top$ où U_k est le vecteur-colonne des coordonnées de u_k dans $\mathscr{B}$.
3. Soient F et G deux sev de E. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux si et seulement si pour tout x dans E, $\|x\|^2 = d(x,F)^2 + d(x,G)^2$.

</td><td></td></tr>
</table>