DM 05

Ces « devoirs à la maison » constituent une partie du travail que vous avez à faire pendant les vacances. Il s'agit de révisions de probabilités de sup. Vous présenterez ces exercices durant la séance de TD du lundi (qui sera donc un peu particulière, pas en autonomie).

Exercice 1. *Mines-Telecom 23*. Une maladie circule dans la population et on note p la probabilité d'être contaminé. La probabilité d'être contaminé par contagion (contact avec un malade) est égale à $\frac{2}{3}$. On considère un commercial qui passe voir n personnes durant sa journée de travail (n clients). On note N la variable aléatoire représentant le nombre de clients contaminés rencontrés par le commercial.

1. Déterminer la loi de N.
2. Quelle est la probabilité que le commercial ne soit pas contaminé à la fin de sa journée de travail ?

Exercice 2. Soient U et V deux variables aléatoires iid de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $m = \min(U, V)$ et $M = \max(U, V)$.

1. Les variables aléatoires m et M sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi de m, et en déduire son espérance.
3. Calculer l'espérance de M sans calculer sa loi.
4. Déterminer la loi de (m, M).

Exercice 3. *Mines-Telecom PC 24*. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires rééelles indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
On pose $Y_i = X_i X_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

1. Donner la loi de Y_i
2. Calculer $\mathbb{E}(Y_i), \mathbb{V}(Y_i)$ et $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.
3. On pose $F_n = \dfrac{S_n}{n}$ où $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $P\left(\left|F_n - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 4. *CCINP PC 23*. On considère N urnes numérotés de 1 à N. Dans l'urne i il y a i boules numérotées de 1 à i. On choisit au hasard successivement une urne, puis une boule dans cette urne. On note X le numéro de la boule tirée. Donner la loi de X.

Exercice 5. *CCINP 22*. Soit $p, q \in [0, 1]$ tels que $p + q = 1$. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires réelles telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!], Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et :

$$\forall (j,k) \in [\![0,n]\!] \times [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}((X=j)\cap(Y=k)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si} \quad k=j \text{ et } j\neq 0 \\ \dfrac{q^n}{n} & \text{si} \quad j=0 \\ 0 & \text{si} \quad k\neq j \text{ et } j \neq 0 \end{cases}$$

1. Lois marginales de X et Y ? Que vaut $\mathbb{E}(Y)$?
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Donner la loi conditionnelle de Y sachant $X = j$

Exercice 6. *Mines-Telecom 23*. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n, p. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On suppose X et Y indépendantes.
Soit Z la variable aléatoire définie par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \neq 0 \\ Y(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) = 0 \end{cases}$$

Trouver la loi de Z, puis son espérance (et sa variance ?).

Exercice 7. *Centrale 19*. On effectue des tirages dans une urne contenant initialement deux boules rouges et une boule noire. À chaque étape, on tire au hasard une boule dans l'urne, puis on la replace dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur.
On note X_k la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée au k-ième tirage est rouge et 0 sinon.
On note S_n le nombre de boules rouges tirées après n tirages. On convient de poser $S_0 = 0$.

1. Écrire une fonction simulant n tirages et revoyant la liste `[S0,...,Sn]`.
2. Écrire une fonction estimant $\mathbb{E}(S_n)$ pour n allant de 0 à 20. Tracer la ligne brisée représentant $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $S_n = k$.
4. Déterminer une relation entre $\mathbb{E}(S_{n+1})$ et $\mathbb{E}(S_n)$.
5. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.
6. Déterminer la loi de X_k.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire d'espérance m et de variance V. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $\mathbb{P}(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V + x^2}{(\varepsilon + x)^2}$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V}{V + \varepsilon^2}$ et que $\mathbb{P}(|X - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{2V}{V + \varepsilon^2}$.
3. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef.

Exercice 9. Soient X et Y des variables aléatoires.

1. Démontrer que $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).
2. Retrouver l'inégalité de Cantelli, en remarquant que $\mathbb{E}(\varepsilon + m - X) \leqslant \mathbb{E}((\varepsilon + m - X)\mathbb{1}_{X<m+\varepsilon})$, et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $(\varepsilon + m - X)\mathbb{1}_{X<m+\varepsilon}$.

Exercice 10. *X PC 24*. Soient $a \in \mathbb{R}$, $q \geqslant 3$ et (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et uniformes sur $\left\{\dfrac{k}{q}, k = 0, \dots, q-1\right\}$. On définit la suite (T_n) par : $T_0 = 0$ et $\forall n, T_{n+1} = T_n + a + \sin\left(2\pi\left(T_n - X_n\right)\right)$. Déterminer l'espérance de T_n.