PSI – Programme de colles
Semaine 06 – du 4 au 8 novembre 2024

Programme en bref

— Révisions d'algèbre bilinéaire : produit scalaire, distance, bases orthonormées, projecteurs orthogonaux, Gram-Schmidt.

— Normes sur un espace vectoriel : définition, exemples, normes équivalentes.

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. Pour un sevdf F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.
2. La distance à un sevdf est atteinte en le projeté orthogonal.
3. Théorème de représentation des formes linéaires.
4. Procédé d'ortho**gonalisation** de Gram-Schmidt : description de l'algorithme, application à l'orthogonalisation puis orthonormalisation de $(1, X, X^2)$ pour $\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$. Ne pas demander la preuve de Gram-Schmidt.
5. Montrer qu'une des normes 1/2/∞ sur $\mathbb{K}^n$ ou sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ est une norme.
6. Définitions en vrac : norme, caractère borné, boules, convergence.
7. Unicité de la limite (le cours sur les suites réelles de MPCSI est supposé connu)
8. Limite d'une somme (le cours sur les suites réelles de MPCSI est supposé connu)
9. Une suite convergente est bornée (le cours sur les suites réelles de MPCSI est supposé connu)
10. Si deux normes sont équivalentes, toute suite bornée pour l'une est bornée pour l'autre ; toute suite convergente pour l'une est convergente pour l'autre.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Espaces préhilbertiens réels

L'objectif majeur est le théorème de projection orthogonale et l'existence de la meilleure approximation quadratique. On s'appuie sur des exemples de géométrie du plan et de l'espace pour illustrer les différentes notions.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire et norme associée	
Produit scalaire. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Exemples de référence :	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$.
produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produit scalaire défini par une intégrale sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.	Expression $X^\top Y$. Expression $\mathrm{Tr}(A^\top B)$.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Norme associée au produit scalaire.	Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Les étudiants doivent savoir manipuler les identités remarquables sur les normes (développement de $\|u \pm v\|^2$, identité de polarisation).
b) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel F, d'une partie X. Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	Notation $F^{\perp}$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Bases orthonormées d'un espace euclidien	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
d) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.	Dimension de $F^\perp$ en dimension finie.
Projection orthogonale p_F sur un sous-espace vectoriel F de dimension finie.	Les étudiants doivent savoir déterminer $p_F(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormée de F ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de F.
Distance d'un vecteur à un sous-espace. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	Notation $d(x,F)$.
Projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$; distance entre x et $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.	Application géométrique à des calculs de distances.
e) Formes linéaires sur un espace euclidien	
Représentation d'une forme linéaire à l'aide d'un produit scalaire.	Vecteur normal à un hyperplan.

Espaces vectoriels normés

Cette section vise les objectifs suivants :

- *généraliser au cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;*
- *fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.*

Les notions seront illustrées par des exemples concrets et variés.
Il convient de souligner l'aspect géométrique des concepts topologiques à l'aide de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	Normes usuelles $\\|\ \\|_1$, $\\|\ \\|_2$ et $\\|\ \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme $\\|\ \\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère.	
Partie convexe.	Convexité des boules.
Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Convergence et divergence d'une suite.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.
Unicité de la limite. Opérations sur les limites.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.