Chapitre 06 – Probabilités 1 – Résumé de cours

Rappels : $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{x^k}{k!}=e^x\ (x\in\mathbb{R})$; $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}x^k=\frac{1}{1-x}\ (x\in]-1,1[)$; $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\ (x\in]-1,1[)$

1 Espaces probabilisés et variables aléatoires

1.1 Événements et variables aléatoires

Définition 1

1. On appelle tribu (ou sigma-algèbre) sur un **univers** Ω une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que :
   (i) $\Omega\in\mathscr{A}$
   (ii) $\forall A\in\mathscr{A}, \overline{A}=\Omega\backslash A\in\mathscr{A}$
   (iii) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\in\mathscr{A}$
2. Les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés événements (ou parties mesurables).
3. Deux événements A et B sont dits incompatibles lorsque $A\cap B=\varnothing$.
4. Un système complet d'événements est une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion est égale à Ω.

Proposition 2

Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, $\varnothing\in\mathscr{A}$ et $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty}A_n\in\mathscr{A}$ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}^{\mathbb{N}}$.

Définition 3

1. Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur un ensemble Ω, une variable aléatoire discrète sur$(\Omega,\mathscr{A})$ est une application X sur Ω, d'image finie ou dénombrable, telle que : $\forall x\in X(\Omega), X^{-1}(\{x\})\in\mathscr{A}$.
2. On définit, si $B\in X(\Omega)$, l'événement $\{X\in B\}=\{\omega\in\Omega,\ X(\omega)\in B\}$.
3. Si A est un événement, la **fonction indicatrice** de A, notée, $\mathbb{1}_A$, est la variable aléatoire définie par $\mathbb{1}_A(\omega)=1$ si $\omega\in A$ et 0 sinon.

Remarque 4

Il faut retenir ce principe fondamental sur les probabilités : les objets fondamentaux sont les **variables aléatoires** ,l'univers et la tribu ne seront **jamais à définir**. De même, les événements sont créés par les variables aléatoires.

Proposition 5 (et définition)

1. Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans E, ensemble dénombrable, si f est une fonction de E dans F, alors on note $f(X)$ la variable aléatoire définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ f(X)(\omega) = f(X(\omega))$. On définit ainsi une variable aléatoire discrète.
2. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, à valeurs respectives dans E_1 et E_2, alors pour toute $g : E_1 \times E_2 \times G$, $g(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète.
3. En particulier, (X, Y) est une variable aléatoire discrète.
4. On généralise au cas de n variables aléatoires.

1.2 Probabilité

Définition 6

1. Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, une probabilité sur$(\Omega, \mathscr{A})$ est une application $\mathbb{P}$ de $\mathscr{A}$ dans $[0,1]$ vérifiant : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'évènements deux à deux incompatibles, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (σ-additivité).
2. On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.
3. Si $\mathbb{P}(A) = 1$ (resp 0), A est dit presque sûr (resp. négligeable).
4. On dit qu'un suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est un système quasi-complet lorsque ces évènements sont deux à deux incompatibles et que la somme de leurs probabilités vaut 1.

Proposition 7

Soient A, B, deux événements, $(A_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est une suite d'évènements.

1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3. Une probabilité est croissante pour l'inclusion.
4. (Continuité croissante) Si pour tout n, $A_n \subset A_{n+1}$, alors $\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.
5. (Continuité décroissante) Si pour tout n, $A_{n+1} \subset A_n$, alors $\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.
6. (Sous-additivité) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Proposition 8 (Probabilités totales)

Si $(A_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est un système (quasi-)complet d'évènements alors : $\forall B,\ \mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$.

Définition 9

Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on appelle loi de X l'application $\mathbb{P}_X : \left| \begin{array}{l} \mathscr{P}(X(\Omega)) \to [0,1] \\ U \mapsto \mathbb{P}(X \in U) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(U)\right) \end{array} \right.$.

Remarque 10

1. $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $(X(\Omega))$, entièrement déterminée par $\{P(X=x)\}_{x \in X(\Omega)}$.
2. En pratique, on n'utilise **JAMAIS** la notation $\mathbb{P}_X$.
3. Déterminer la **loi** d'une variable aléatoire X, c'est déterminer un ensemble E tel que $X(\Omega) \subset E$ et, pour tout x dans E, $\mathbb{P}(X=x)$.
4. Si deux variables X et Y suivent la même loi, on note $X \sim Y$.

Définition 11 (Lois usuelles)

Loi	Paramètre	Notation	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}(X=k)$
Uniforme		$X \sim \mathscr{U}(E)$	E	$\dfrac{1}{\mathrm{Card}(E)}$
Bernoulli	p	$X \sim \mathscr{B}(p)$	$\{0,1\}$	$\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ $\mathbb{P}(X=1) = p$
Binomiale	(n,p)	$X \sim \mathscr{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Géométrique	p	$X \sim \mathscr{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$
Poisson	λ	$X \sim \mathscr{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

Définition 12

1. La loi du couple (X,Y) est appelée loi conjointe. Elle est déterminée par $\{P((X,Y) = (x,y)) = P((X=x) \cap (Y=y)); (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$.
2. Les lois de X et de Y sont appelées lois marginales.

Remarque 13

Il faut pouvoir retrouver les lois marginales à l'aide des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X=x_0) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=x_0, Y=y) \text{ et } \mathbb{P}(Y=y_0) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x, Y=y_0).$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

2 Conditionnement et indépendance

2.1 Conditionnement

Définition 14

Si A et B sont des évènements et si $P(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $P_B(A) = P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. On définit bien une probabilité.

Proposition 15 (Formule des probabilités composées)

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des évènements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$ alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(A_1\right) P_{A_1}\left(A_2\right) P_{A_1 \cap A_2}\left(A_3\right) \ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}\left(A_n\right).$$

Proposition 16 (Formule des probabilités totales)

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système (quasi-)complet d'évènements, $\forall B \in \mathscr{A}$, $P(B) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(B \cap A_n\right)$.

Proposition 17 (Formule de Bayes)

Si A et B sont deux événements non négligeables, $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$.

2.2 Indépendance

Définition 18

1. Deux événements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
2. Des évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dits mutuellement indépendants lorsque, pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$, $P\left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}} A_i\right) = \prod_{i\in\mathrm{I}} P\left(A_i\right)$.
3. Deux v.a.d. X et Y sont dites indépendantes, et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ lorsque : $\forall A \subset X(\Omega), \forall B \subset Y(\Omega), P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$.
4. Des variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$ sont dites mutuellement indépendantes si pour tous $(A_1, \ldots, A_n)$, $\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$.
5. Des variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont dites mutuellement indépendantes si pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(X_0, \ldots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes.
6. Des variables aléatoires sont dites i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées) si elles sont indépendantes et suivent la même loi.

Proposition 19

$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

Remarque 20

Des évènements peuvent être 2 à 2 indépendants sans l'être mutuellement.

Proposition 21

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants alors $A_1, A_2, \ldots, \overline{A_n}$ le sont aussi.

Proposition 22 (Lemme des coalitions)

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a.d. indépendantes alors $f\left(X_1, \ldots, X_k\right)$ et $g\left(X_{k+1}, \ldots, X_n\right)$ sont deux v.a.d. indépendantes.

Proposition 23

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des vaiid telles que $X_1 \sim \mathscr{B}(p)$. Alors $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathscr{B}(n, p)$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

3 Moments d'une variable aléatoire

3.1 Espérance d'une v.a.d. réelle ou complexe

Définition 24

1. L'espérance d'une v.a.d. X à valeurs dans $[0, +\infty]$ est définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

(avec la convention $x\mathbb{P}(X = x) = 0$ si $x = +\infty$ et $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$)

2. On dit qu'une v.a.d. X à valeurs dans $\mathbb{C}$ est d'espérance finie lorsque la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. $\mathbb{E}(X)$ est alors la somme de cette famille.

3. On dit que X est centrée lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$.

Proposition 25

Si X est d'espérance finie presque sûrement positive, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si X est presque sûrement nulle.

Proposition 26

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.

Proposition 27 (Formule de transfert)

$f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Exemple 28 (Espérances usuelles)

Loi	$\mathscr{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$	$\mathscr{B}(p)$	$\mathscr{B}(n, p)$	$\mathscr{G}(p)$	$\mathscr{P}(\lambda)$
Espérance	$(a+b)/2$	p	np	$1/p$	λ

Proposition 29

1. Linéarité de l'espérance : si X et Y sont deux v.a.d. admettant une espérance, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$.
2. Si $X \leqslant Y$ presque sûrement, $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.
3. Si $|X| \leqslant Y$ et $\mathbb{E}(Y) < +\infty$ alors X est d'espérance finie et $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathrm{E}(Y)$.

Proposition 30

Si X et Y sont deux v.a.d. indépendantes d'espérances finies, alors XY aussi et $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.

Proposition 31 (Inégalité de Markov)

Si X est une v.a.d. réelle **positive** (presque sûrement), admettant une espérance, alors pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

3.2 Moments d'ordre 2 – Variance d'une v.a.d. réelle

Proposition 32 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit X et Y sont deux v.a.d. réelles. Si X^2 et Y^2 sont d'espérances finies, alors XY aussi et $|\mathrm{E}(XY)| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^2\right)}$

Définition 33

Si X et Y sont deux v.a.d. réelles avec X^2 et Y^2 d'espérances finies, on définit :

1. la variance de X, $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$
2. la covariance de X et Y, $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$
3. l'écart type de $X, \sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$ (et l'on dit que X est réduite lorsque $\sigma(X) = 1$)

Exemple 34 (Variances usuelles)

Loi	$\mathscr{B}(p)$	$\mathscr{B}(n,p)$	$\mathscr{G}(p)$	$\mathscr{P}(\lambda)$
Variance	$p(1-p)$	$np(1-p)$	q/p^2	λ

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 35

1. La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive sur l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles.
2. $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
3. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ et donc $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$
4. $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante.
5. $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, \mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$
6. si $\sigma(X) > 0$ alors $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Proposition 36

1. (inégalité de Bienaymé-Tchebycheff) Soit X une v.a.d. réelle admettant une variance. Alors pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$.
2. (loi faible des grands nombres) Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.d. réelles i.i.d., admettant toutes une espérance μ et une variance σ^2. On note, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
On dit que la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge en probabilité* vers μ.