TD 06
Probabilités

Exercice 1. *Loi des événements rares – théorème de Poisson*. On considère $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de lois $\mathcal{B}(n, p_n)$. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$.
Démontrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, c'est-à-dire que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Exercice 2. *La loi géométrique est sans mémoire*. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On dit que X est sans mémoire si pour tous j, k entiers naturels, $\mathbb{P}_{X>j}(X > j + k) = \mathbb{P}(X > k)$.

1. Démontrer que si X suit une loi géométrique, alors X est sans mémoire.
2. Démontrer que, réciproquement, si X est sans mémoire, X suit une loi géométrique de paramètre $p = \mathbb{P}(X = 1)$.

Exercice 3. *Formule de Wald*. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{N}$, N une variable aléatoire indépendante des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et, $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$: cela signifie que pour tout ω de Ω, $S(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$.

1. Justifier que S est bien une variable aléatoire discrète.
2. On suppose que X_1 et N admettent une espérance. Démontrer que S admet une espérance et que $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.
3. On suppose que X_1 est centrée et admet une variance. Démontrer que S admet une variance et que $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(X_1)$.

Exercice 4. *Lemmes de Borel-Cantelli et applications*. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On considère l'événement : $\mathrm{A} = \displaystyle\bigcap_{k=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right)$.

1. Traduire avec des mots en français l'événement A.
2. On suppose que la série de terme général $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ converge. En se rappelant que la probabilité d'une réunion est inférieure à la somme des probabilités, déterminer $\mathbb{P}(A)$.
3. On suppose maintenant que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série de terme général $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ diverge. En étudiant $\mathbb{P}(\overline{A})$, et en remarquant que $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$, déterminer $\mathbb{P}(A)$.
4. **Application.** On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ iid vérifiant $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer $\mathbb{P}(S_n = 0)$ et démontrer que si $p \neq \dfrac{1}{2}$, alors S_n est infiniment souvent égale à 0.

Exercice 5. *CCINP 2019*. Soit $(\mathrm{A}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille finie d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathrm{T}, \mathbb{P})$. Montrer :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_n) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A}_1) + \cdots + \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{A}_n) + n - 1.$$

Exercice 6. *Mines-Télécom 24*. Soit X suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On considère les évènements A : « X est un entier pair » ; et B : « X est un multiple de 3 » Calculer $P(A)$ et $P(B)$. Ces deux évènements sont-ils indépendants ?

Exercice 7. *Mines-Télécom 24*. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = P(Y=k) = \dfrac{1+a^k}{4k!}$.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 8. *Mines-Télécom 24*. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall (i,k) \in \mathbb{N}^2, P(X=i, Y=k) = a\dfrac{i+k}{2^{i+k}}$.

1. Déterminer la valeur de a.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $P(X=Y)$.

Exercice 9. *Mines-Télécom 24*. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. Calculer $P(X_i > k)$ et $P(X_i \leqslant k)$.
2. Soit $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
   (a) Calculer $P(Y > k)$ puis $P(Y \leqslant k)$ et $P(Y = k)$.
   (b) Montrer que Y a une espérance finie, que l'on calculera.

Exercice 10. *CCINP 2023*. Soit une urne avec 3 jetons numérotés. On tire avec remise des jetons de l'urne. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaire pour obtenir 2 jetons différents pour la première fois. On note Z la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour obtenir les 3 jetons pour la première fois.

1. Donner la loi de Y.
2. Reconnaitre la loi de $Y-1$. En déduire la variance et l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de (Y,Z).
4. Donner enfin la loi de Z.

Exercice 11. *Mines-Télécom 24*. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Montrer que $Z = X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.
2. Calculer $P_{Z=n}(X=k)$ pour $(k,n) \in \mathbf{N}^2$.
3. Reconnaître alors la loi conditionnelle de X sachant $(Z=n)$.

Exercice 12. *CCINP 23*. Soit $Y = 1+X^2$ où X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Calculer $E(Y)$.
2. Calculer $P(2X < Y)$.

Exercice 13. *Mines-Ponts 24*. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$ et pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$, on pose : $A_n = (X_1 < \cdots < X_n)$, $u_n = P(A_n)$, $B_{n,k} = (X_1 = k, X_1 < \cdots < X_n)$, $v_{n,k} = P(B_{n,k})$. Enfin pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\pi_n = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - q^j\right)$.

1. Calculer $P(X_1 = X_2)$ et $P(X_1 < X_2)$.
2. Pour $n \geqslant 3$ et $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $v_{n,k} = pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j}$.
3. En déduire que, pour $n \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{n,k} = \dfrac{1}{\pi_{n-1}} \left(pq^{k-1}\right)^n q^{\alpha_n}$ où α_n est un entier à préciser
4. Établir enfin que, pour $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{1}{\pi_n} p^{\beta_n} q^{\gamma_n}$ où β_n et γ_n sont des entiers que l'on précisera.
5. (question qui n'était pas dans la planche, en mode Centrale Maths II) Vérifier le résultat avec python.

Exercice 14. *Centrale 24*. Une candidate doit se rendre sur un lieu de convocation. Elle dispose pour cela de 2 chemins : le chemin A et le chemin B. Elle prend le chemin A avec une probabilité $p \in]0,1[$. Soit T la variable aléatoire égale au temps de trajet de la candidate, en minutes. Le temps de trajet du chemin A (respectivement B) suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$ (respectivement $b > 0$).

1. (a) **[Py]** Écrire une fonction prenant comme argument p, a et b et renvoyant la valeur de T.
   (b) **[Py]** On prend $a = 5$ et $b = 10$. Donner les valeurs moyennes de T avec $N = 500$ simulations pour $p \in \left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right\}$.
   (c) **[Py]** Proposer une fonction calculant une approximation de $E(T)$, justifiée par un résultat précis du cours.
2. Déterminer la loi de T en fonction de p, a et b, puis calculer $E(T)$ et $V(T)$ si elles existent.
3. Déterminer N de sorte que, dans 95% des cas, on observe un écart maximum de 30 secondes entre la valeur moyenne de N simulations et l'espérance de T.

Exercice 15. *Mines 24*. Soient $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 4$, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[\![1, r]\!]$. On note A_n l'événement : on retrouve n fois chaque entier de $[\![1, r]\!]$ dans le nr uplet $(X_1, \ldots, X_{nr})$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Déterminer la probabilité qu'une infinité de A_n se réalisent.