Semaine 06 – Colle du lundi 02/11 à 8h

Nom	Énoncé et commentaires	Note
	Planche python. **1.** Justifier que $\langle\|\rangle : (P,Q) \mapsto \langle P \mid Q\rangle : \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, et que $N_\infty : P \mapsto \max_{t\in[-1,1]} \|P(t)\|$ est une norme. **2. [Py]** n note $F = \mathbb{R}_5[X]$, déterminer une base orthonormée $(E_0,\dots,E_5)$ de F en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique. **3. [Py]** Tracer (sur $[-1,1]$) les courbes représentatives de $E_0,\dots,E_5$. **4. [Py]** Estimer $N_\infty(E_i)$, $i \in [\![0,5]\!]$, ainsi que les valeurs de t par laquelle elle est atteinte. Conjecturer la valeur de $(N_\infty(E_i))^2$, $i \in [\![0,5]\!]$. On admet pour la suite ces résultats mathématiquement établis. **5.** Montrer que si $P \in F$ est tel que $\\|P\\| = 1$, alors $N_\infty(P) \leqslant 3\sqrt{2}$. Quand a-t-on égalité ? **6.** Trouver a et b optimaux tels que pour tout $P \in F$, $a\\|P\\| \leqslant N_\infty(P) \leqslant b\\|P\\|$. Donner des exemples pour lesquels il y a égalité, à gauche ou à droite.	
	1. Cours. Si deux normes sont équivalentes, toute suite bornée/convergente pour l'une est bornée/convergente pour l'autre, vers la même limite. **2.** On prend $(a_0,\dots,a_n)$ $n+1$ réels (pas forcément distincts) (a) Démontrer que $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{Q}\rangle = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}^{(k)}(a_k)\,\mathrm{Q}^{(k)}(a_k)$ définit un produit scalaire. (b) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(\mathrm{P}_0,\dots,\mathrm{P}_n)$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ telle que $\deg \mathrm{P}_k = k$. (c) Expliciter $\mathrm{P}_0,\dots \mathrm{P}_n$ lorsque $a_0 = \dots = a_n = a$ **3.** Montrer la réciproque de la question de cours.	
	1. Cours. Montrer que $N_{a,b} = \sup_{t\in[a,b]} \|P(t)\|$ est une norme. **2.** Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère $\varphi : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f,g) = \int_0^1 \left(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\right)\mathrm{d}t$. (a) Montrer que φ est un produit scalaire. (b) Soient $\mathrm{V} = \{f \in \mathrm{E}, f(0) = f(1) = 0\}$ et $\mathrm{W} = \left\{f \in \mathrm{E}, f'' = f\right\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux. Exprimer la projection orthogonale sur W des éléments de E. (c) On note $\mathrm{E}_{\alpha,\beta} = \{f \in \mathrm{E}, f(0) = \alpha, f(1) = \beta\}$. Calculer $\inf_{f\in\mathrm{E}_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \left(f^2 + (f')^2\right)$. **3.** Montrer que $N_{a,b}$ et $N_{c,d}$ ne sont pas équivalentes lorsque $(a,b) \neq (c,d)$, *On pourra commencer par un cas simple et explicite.*	