CORRECTION DM05

⑥ Z est à valeurs dans $⟦1, n⟧$

Soit $k \in ⟦1,n⟧$

On a $P(Z=k) = P((Z=k)\cap(X=0))$ + $P((Z=k)\cap(X\neq 0))$

proba. totales ($(X=0),(X\neq 0)$) est un système complet d'évts

$$= P((Y=k)\cap(X=0)) + P((X=k)\cap(X\neq 0))$$

$$= P(Y=k)\,P(X=0) + P(X=k)\,\underbrace{P(X\neq 0)}_{=1}$$

car $k \in ⟦1,n⟧$

$$\underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \frac{1}{n}(1-p)^n + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(Z) = \sum_{z \in Z(\Omega)} z\,P(Z=z)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\,P(Z=k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}(1-p)^n + k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\right)$$

$$= \frac{(1-p)^n}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \underbrace{\sum_{k=\cancel{1}\,0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

on reconnaît l'espérance d'une loi binomiale

$$\underline{E(Z) = \frac{(1-p)^n}{2}(n+1) + np}$$

- $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$

Pour calculer $E(Z^2)$, on utilise la formule de transfert

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2\,P(Z=k)$$

$$= \frac{(1-p)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{E(W^2)}$$

$$= \frac{(1-p)^n}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + E(W^2)$$

où $W \sim \mathcal{B}(n,p)$

$E(W^2) = V(W) + E(W)^2$

⑦ PYTHON

1) cf. CdP

```
( L(x) == 1 )
⟺
if L(x) == 1:
        Sn = res(-1) + 1
else:
        Sn = res(-1)
```

QUEST° FONDAMENTALE

2) "Estimer" $E(S_n)$ → loi faible des gds nombres (on ne veut pas la calculer)

- On fait beaucoup d'appels de S_n et on moyenne

↳ on remarque que l'on peut faire une conjecture : $E(S_n) = \alpha n$ (linéaire)
(qui nous aide par la suite)

3) Soient $n \in \mathbb{N}$,
$k \in [\![0, n]\!]$

On sait que $S_n = k$ donc il y a $k+2$ boules rouges dans l'urne et $n-k+1$ boules noires

$$P_{(S_n = k)}(\underbrace{X_{n+1} = 1}_{\text{boule rouge}}) = \frac{2+k}{3+n}$$

et $\quad P_{(S_n=k)}(\underbrace{X_{n+1}=0}_{\text{boule noire}}) = \dfrac{n-k+1}{n+3}$

4) On a $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$

d'où $\quad E(S_{n+1}) = E(S_n) + E(X_{n+1})$

or $\underline{E(X_{n+1}) = P(X_{n+1}=1)}$ car X_{n+1} suit une loi de Bernoulli

puis par la formule des probabilités totales et $(S_n=k)_{k\in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'évts. :

$$= \sum_{k=0}^{n} P_{(S_n=k)}(X_{n+1}=1)\, P(S_n=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2+k}{n+3} P(S_n=k)$$

$$= \frac{1}{n+3} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} kP(S_n=k)} + \frac{2}{n+3} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P(S_n=k)}$$

$$= \frac{1}{n+3} E(S_n) + \frac{2}{n+3} \times 1$$

D'où $\quad E(S_{n+1}) = E(S_n) + \dfrac{1}{n+3} E(S_n) + \dfrac{2}{n+3}$

$$= E(S_n)\left(1 + \frac{1}{n+3}\right) + \frac{2}{n+3}$$

5) Par les tests effectués sur Python, on conjecture $E(S_n) = \alpha n$

On aurait alors $\quad \alpha(n+1) = \alpha n\left(1 + \dfrac{1}{n+3}\right) + \dfrac{2}{n+3}$

$$= \alpha n\left(\frac{n+4}{n+3}\right) + \frac{2}{n+3}$$

D'où $\alpha(n+1) - \alpha n\left(\frac{n+4}{n+3}\right) = \frac{2}{n+3}$

d'où $\alpha\left(n+1 - n\left(\frac{n+4}{n+3}\right)\right) = \frac{2}{n+3}$

d'où $\alpha\left((n+1)(n+3) - n(n+4)\right) = 2$

donc $\alpha = \frac{2}{n^2+4n+3-n^2-4n} = \frac{2}{3}$

On montre par récurrence : $\underline{E(S_n) = \frac{2}{3}n}$

6) Par la quest° 4 :

$$\underline{P(X_{n+1}=1)} = E(S_{n+1}) = \frac{1}{n+3}E(S_n) + \frac{2}{n+3}$$

$$= \underline{\frac{1}{n+3} \times \frac{2}{3}n + \frac{2}{n+3}}$$

Donc X_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre : $p = \frac{1}{n+3} \times \frac{2}{3}n + \frac{2}{n+3} = \underline{\frac{2}{3}}$

<u>RMQ</u> : on pouvait retrouver $E(X_n)$ en remarquant que $X_n = S_n - S_{n+1}$
$= P(X_n = 1)$

(8) Inégalité de Cantelli

1) Soit $x \geqslant 0$

$$\forall \omega \in \Omega, \quad (X(\omega) - m \geqslant \varepsilon) \Leftrightarrow (X(\omega) - m + x \geqslant \varepsilon + x)$$

$$\Rightarrow \left((X(\omega) - m + x)^2 \geqslant (\varepsilon + x)^2 \right)$$

Donc $\{X - m \geqslant \varepsilon\} \subset \{(X - m + x)^2 \geqslant (\varepsilon + x)^2\}$

Par croissance de P :

$$P(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant P((X - m + x)^2 \geqslant (\varepsilon + x)^2))$$

par l'inégalité de Markov. car $(X - m + x)^2 \geqslant 0$

$$\leqslant \frac{E((X - m + x)^2)}{(\varepsilon + x)^2}$$

or $E((X - m + x)^2) = E((X - m)^2 + 2x(X - m) + x^2)$

$$= E((X - m)^2) + 2x\underbrace{E(X - m)}_{E(X) - E(X)} + x^2$$

$$= V + x^2$$

Donc $\forall x \geqslant 0, \quad P(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V + x^2}{(\varepsilon + x)^2}$

2) Évaluons en $x = \frac{V}{\varepsilon}$

On a donc : $P(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V + \frac{V^2}{\varepsilon^2}}{\left(\varepsilon + \frac{V}{\varepsilon}\right)^2}$

Or : $\dfrac{V + \frac{V^2}{\varepsilon^2}}{\left(\varepsilon + \frac{V}{\varepsilon}\right)^2} = \dfrac{\varepsilon^2 V + V^2}{\left(\varepsilon^2 + V\right)^2} = \dfrac{V(\varepsilon^2 + V)}{(\varepsilon^2 + V)^2}$

$$= \frac{V}{\varepsilon^2 + V}$$

D'où le résultat.

- $(|X-m| \geq \varepsilon) = (X-m \geq \varepsilon) \sqcup (X-m \leq -\varepsilon)$

Donc $P(|X-m| \geq \varepsilon) = P(X-m \geq \varepsilon) + P(X-m \leq -\varepsilon)$

Posons $Y = -X$ d'où $E(Y) = -m = \mu$

$$(X-m \leq -\varepsilon) = (Y-\mu \geq \varepsilon)$$

Donc $P(X-m \leq -\varepsilon) = P(Y-\mu \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(Y)}{V(Y) + \varepsilon^2}$

par la première partie de la quest°

Or $V(Y) = (-1)^2 V(X) = V$

Donc $P(|X-m| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{2V}{V + \varepsilon^2}$

Q3) L'inégalité de Bienaymé - Tchebychev

$\varepsilon > 0$ $\quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V}{\varepsilon^2}$

Résolvons $\dfrac{2V}{V+\varepsilon^2} \leq \dfrac{V}{\varepsilon^2}$

ssi $2V\varepsilon^2 \leq V(V+\varepsilon^2)$ ssi $\varepsilon^2 \leq V$

Si $V \geq \varepsilon^2$, l'inég. de Cantelli est meilleure

Si $V \leq \varepsilon^2$, celle de B-T est meilleure.

9

1) ⚠ espérance n'est pas en p.s.

On pose $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$Q(t) = E((tX+Y)^2) \quad \text{où } (X,Y) \text{ des v.a.}$$

$$= E(t^2X^2 + 2XYt + Y^2)$$

$$= t^2 E(X^2) + 2t E(XY) + E(Y^2)$$

<u>Cas</u> $E(X^2) = 0$

donc $X = 0$ <u>presque sûrement</u> $(P(X=0)=1)$

donc $XY = 0$

d'où l'inégalité $(0 \leq 0)$

<u>Cas</u> $E(X^2) \neq 0$ → Q polynôme de degré 2 de signe cst.

↳ $4E(XY)^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0$

d'où $\underline{E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)}$

2) Soit $\omega \in \Omega$, "on pourra remarquer que" → démontrer

- Si <u>$X(\omega) < m + \varepsilon$</u> :

<u>alors</u> : $(\varepsilon + m - X(\omega)) \times \overbrace{\mathbb{1}_{X < m+\varepsilon}(\omega)}^{=1} \geq (\varepsilon + m - X(\omega))$

• Si $X(\omega) \geq m+\varepsilon$:

alors : $(\varepsilon+m-X(\omega)) \times \underbrace{\mathbb{1}_{X<m+\varepsilon}(\omega)}_{=0} = 0 \geq \varepsilon+m-X(\omega)$

donc $\forall \omega \in \Omega$,

par croissance de l'espérance :

on a que $E(\varepsilon+m-X) \leq E((\varepsilon+m-X)\mathbb{1}_{X<m+\varepsilon})$

donc $(E(\varepsilon+m-X))^2 \leq E((\varepsilon+m-X)\mathbb{1}_{X<m+\varepsilon})^2$

$\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$ $\qquad \leq E((\varepsilon+m-X)^2)\, E(\mathbb{1}_{X<m+\varepsilon}^2)$ par C-Schwarz

et $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ $\qquad \leq E((\varepsilon+m-X)^2)\, P(X<m+\varepsilon)$

Donc : $P(X<m+\varepsilon) \geq \dfrac{E((\varepsilon+m-X))^2}{E((\varepsilon+m-X)^2)}$

or $P(X \geq m+\varepsilon) = 1 - P(X<m+\varepsilon)$

donc $P(X>m+\varepsilon) \leq 1 - \dfrac{E((\varepsilon+m-X))^2}{E((\varepsilon+m-X)^2)}$

$$= \frac{E((\varepsilon+m-X)^2) - E(\varepsilon+m-X)^2}{E(\varepsilon+m-X)^2}$$

donc

$V(aX+b) = b^2 V(X)$

$$P(X>m+\varepsilon) \leq \frac{V(\varepsilon+m-X)}{E(\varepsilon^2+2\varepsilon(m-X)+(m-X)^2)} = \frac{V(X)}{\varepsilon^2+2\varepsilon E(m-X) + E(m-X)^2}$$

$$= \frac{V(X)}{\varepsilon^2+V(X)}$$