Correction DM OS Probas

EXERCICE 1

p : proba d'être contaminé
N : VA qui compte le nb de clients contaminés

1) on veut déterminer la loi de N

$N \sim \mathcal{B}(n,p)$ n : nb de clients rencontrés
p : proba d'être contaminé

preuve : on nomme X_i, la variable aléatoire qui vaut :
1 si la ième personne est contaminée
0 sinon

par hypothèse
- $X_i \sim \mathcal{B}(p)$
- $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sont indépendantes
- $N = \sum_{i=1} X_i$ donc N est la somme de n VA de Bernouilli, donc $N \sim \mathcal{B}(n,p)$

2) C : " le commercial est contaminé à la fin de sa journée "

soit $k \leq n$, $P(N=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

D'après la loi des proba totales :
$P(\overline{C}) = \sum_{k=0}^{n} P(\overline{C} \mid N=k)\, P(N=k)$

car $\{N=k,\ k \in [\![0,n]\!]\}$ forme un SCE (système complet d'événements)

$$P(\overline{C}) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

car $P(\overline{C} \mid N=k) = \underbrace{\frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{3}}_{k \text{ fois (nb de personnes contaminées)}} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$

$$P(\overline{C}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{3}\right)^k (1-p)^{n-k} = \left(\frac{p}{3} + (1-p)\right)^n$$

$$P(\overline{C}) = \left(1 - \frac{2}{3}p\right)^n$$

autre solution :

on note Y_i la VA qui vaut 1 si la ième personne contamine le commercial, 0 sinon

~~$P(Y_i = 1) = \frac{2}{3}p$~~

alors $P(Y_1 = 0, Y_2 = 0, \dots, Y_n = 0) \cancel{=} \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = 0)$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{2}{3}p\right)$$

$$= \left(1 - \frac{2}{3}p\right)^n$$

problème : $P_{Y_1=1}(Y_2 = 1) = 0$

(si la 1ère personne a contaminé le commercial, la 2ème personne ne le fait pas)

par la formule des probas composées,

$P(Y_1 = 0 \cap Y_2 = 0 \cap \dots \cap Y_n = 0) = P(Y_1 = 0) \times P_{Y_1=0}(Y_2 = 0)$

$\times \dots \times P_{Y_1 = \dots = Y_{n-1}} = 0$

or $P(Y_1 = 0) = 1 - P(Y_1 = 1) = 1 - p \times \frac{2}{3}$

$P_{Y_1=0}(Y_2 = 0) = 1 - P_{Y_1=0}(Y_2 = 1) = 1 - p \times \frac{2}{3}$ etc

on a le même résultat

EXERCICE 2

$U \sim \mathcal{U}[1, n]$

$V \sim \mathcal{U}[1, n]$

1) ces variables ne sont pas indépendantes car

$P(m = n, M = 1) = 0 \neq P(m = n)P(M = 1)$

2) m est à valeur dans $[\![1, n]\!]$

soit $a \in [\![1, n]\!]$

$P(m = a) = P(U = a, V = a) + P(U = a, V > a)$
$+ P(U > a, V = a)$

$P(m=a) = P(U=a, V=a) + 2 \sum_{b>a}^{n} P(U=a, V=b)$

car U et V suivent la même loi

or $P(U=a, V=a) = P(U=a)P(V=a)$ par indépendance

$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$

et $\sum_{b>a}^{n} P(U=a, V=b) = \frac{n-a}{n^2}$

$P(m=a) = \frac{1}{n^2} + \frac{2(n-a)}{n^2} = \frac{2n-2a+1}{n^2}$

$E(m) = \sum_{a=1}^{n} a P(m=a)$

$= \sum_{a=1}^{n} a \times \frac{2n-2a+1}{n^2}$

$= \sum_{a=1}^{n} a \frac{(2n+1)}{n^2} - \sum_{a=1}^{n} \frac{2a^2}{n^2}$

$= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{(2n+1)}{n^2} - \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$E(m) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

3) $U+V = m+M$

donc $E(U+V) = E(m+M)$

$E(M) = E(U) + E(V) - E(m)$ par linéarité de l'espérance

or $E(U) = \sum_{k=1}^{n} k P(U=k) = \frac{n+1}{2}$

donc $E(M) = n+1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$E(M) = n+1 \left(\frac{4n-1}{6n} \right)$

4) (m, M) est à valeurs dans $⟦1, n⟧^2$

$(a,b) \in ⟦1,n⟧^2$

$P(m=a, M=b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a>b \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } a=b \text{ car } P(m=a, M=b) = P(U=a, V=a) \\ \frac{2}{n^2} & \text{sinon car } P(m=a, M=b) = P(U=a, V=b) + P(U=b, V=a) \end{cases}$

EXERCICE 3

1) $Y_i(\Omega) \subset \{0,1\}$

$$P(X_i = 1) = P(X_i = 1, X_{i+1} = 1)$$
$$= P(X_i = 1) P(X_{i+1} = 1)$$
$$= p^2$$

donc $P(Y_i = 0) = 1 - p^2$ donc $Y_i \sim \mathcal{B}(p^2)$

2) $E(Y_i) = p^2$
$V(Y_i) = p^2(1-p^2)$ } résultats de cours

si $i \neq j$

$$Cov(Y_i, Y_j) = E(Y_i Y_j) - E(Y_i)E(Y_j)$$
$$= E(X_i X_{i+1} X_j X_{j+1}) - E(Y_i)E(Y_j)$$

si $i = j+1$, $Cov(Y_i, Y_j) = E(X_i^2 X_{i+1} X_{i-1}) - p^4$

$$= E(X_i X_{i+1} X_{i-1}) - p^4$$

si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $X^2 = X$

$$= E(X_i) E(X_{i+1}) E(X_{i-1}) - p^4$$
$$= p^3 - p^4$$
$$= p^3(1-p)$$

si $i+1 = j$, on trouve le même résultat
$Cov(Y_i, Y_j) = p^3(1-p)$

sinon, $Cov(Y_i, Y_j) = E(X_i)E(X_{i+1})E(X_j)E(X_{j+1}) - p^4$
$= 0$

3) on calcule l'espérance de F_n

$$E(F_n) = \frac{1}{n} E(S_n)$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(Y_i)$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p^2$$
$$= p^2$$

par l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev

$$P(|F_n - p^2| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(F_n)}{\varepsilon^2}$$

or $V(F_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$

$$= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} cov(Y_i, Y_j)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} cov(Y_i, Y_j)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} p^2(1-p^2) + 2\sum_{i=1}^{n-1} cov(Y_i, Y_{i+1})\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n\, p^2(1-p^2) + 2(n-1)\, p^3(1-p)\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc par encadrement $P(|F_n - p^2| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

EXERCICE 4

on note Y l'urne choisie

$Y \sim U_{[1,n]}$, $P(Y = i) = \frac{1}{N}$

$(Y = 1, \dots, Y = N)$ forme un SCE

on note X la boule choisie à valeur dans $[\![1, N]\!]$

la loi de X conditionnée à l'évènement $Y = i$ est uniforme sur $[\![1, i]\!]$

par formule des probabilités totales

soit $k \in [\![1, N]\!]$ $P(X = k) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{P((X = k) \cap (Y = i))}_{= 0 \text{ si } k > i}$

$$= \sum_{i=k}^{N} P(X = k) \cdot P(Y = i)$$

$$P(X = k) = \frac{1}{N}\sum_{i=k}^{N} \frac{1}{i}$$

EXERCICES

$p, q \in [\![0,1]\!]$ tq $p+q=1$

$X(\Omega) = [\![0,n]\!]$
$Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$

1) $\forall i,j \in [\![0,n]\!]$

si $j=0$ $\quad P(X=0) = \sum_{k=1}^{n} P(X=0, Y=k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{q^n}{n} = q^n$$

sinon $P(X=j) = \sum_{k=1}^{n} P(X=j, Y=k)$

$$= P(X=j, Y=j)$$

$$= \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$$

or $q = 1-p$

$P(X=j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$

$X \sim \mathcal{B}(n,p)$

$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad P(Y=k) = \sum_{j=0}^{n} P(X=j, Y=k)$

$$= P(X=0, Y=k) + \sum_{j=1}^{n} P(X=j, Y=k)$$

$$= \frac{q^n}{n} + \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} k P(Y=k)$

$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
formule des chefs

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{q^n}{n} + k\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= \frac{n+1}{2} q^n + \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

$$= \frac{n+1}{2} q^n + n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1+1} q^{(n-1)-(k-1)}$$

$$\underset{j=k-1}{=} \frac{n+1}{2} q^n + np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{(n-1)-j}$$

$$= \frac{n+1}{2} q^n + np(p+q)^{n-1}$$

$$= \frac{n+1}{2} q^n + np$$

2) si $j = 1$ et $k = 2$

$P(X = j, Y = k) = 0 \neq P(X = j) P(Y = k)$
donc X et Y ne sont pas indépendantes

3) $P(Y = k \mid X = j) = \dfrac{P(X = j \cap Y = k)}{P(X = j)}$

si $j = 0$: $P(Y = k \mid X = 0) = \dfrac{\frac{q^n}{n}}{q^n} = \dfrac{1}{n}$

si $j \neq 0$: $\rightarrow k \neq j$ $\quad P(Y = k \mid X = j) = 0$
$\rightarrow k = j$ $\quad P(Y = k \mid X = j) = 1$