TD 05 - CORRECTION

Exercice 4 :

1) Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite CV dans (E, N_1)
On suppose N_1 et N_2 sont équivalentes.
Alors $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x$, $N_1(x) \leq \beta N_2(x)$
$N_2(x) \leq \alpha N_1(x)$

Soit l la limite de u_n pour N_1 :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $N_2(u_n - l) \leq \alpha N_1(u_n - l)$
Or, $\alpha N_1(u_n - l) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc, par encadrement, $N_2(u_n - l) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Et donc, (u_n) CV dans (E, N_2)

3) On prend $E = \mathbb{R}[X]$, $a \in \mathbb{R}$, $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt$

Mq si $a, b \in [0,1]$, N_a et N_b sont équivalentes

$N_b(P) = |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)|dt$

On suppose $a < b$, or $\int_a^b P'(t)dt = [P(t)]_a^b = P(b) - P(a)$

Donc $N_b(P) = \left| \int_a^b P'(t)dt + P(a) \right| + \int_0^1 |P'(t)|dt$

Inég. triang. $\leq \left|\int_a^b P'(t)\,dt\right| + |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,dt$

IT $\leq |P(a)| + \int_a^b |P'(t)|\,dt + \int_0^1 |P'(t)|\,dt$

car $(a,b)\in[0,1]$ $\leq |P(a)| + 2\int_0^1 |P'(t)|\,dt$

$\leq 2|P(a)| + 2\int_0^1 |P'(t)|\,dt \leq 2N_a(P)$

De même, on montre que $N_a(P) \leq 2N_b(P)$

4) Soit $n\in\mathbb{N}$. $P_n = \dfrac{X^n}{2^n}$

On calcule $N_a(P_n) = |P_n(a)| + \int_0^1 |P_n'(t)|\,dt$

$$= \left|\frac{a^n}{2^n}\right| + \int_0^1 \frac{1}{2^n}\, n t^{n-1}\,dt$$

$$= \frac{|a^n|}{2^n} + \left[\frac{t^n}{2^n}\right]_0^1$$

$$= \frac{|a^n|}{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}$$

. si $|a|>2$: $N_a(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Or une suite est CV est bornée donc (P_n) pas CV pour N_a

. Si $|a|<2$: $N_a(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(P_n) CV vers 0 pour N_a.

• si $a = 2$: $N_a(P_n) = 1 + \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

$$N_a(P_n - 1) = |P_n(a) - 1| + \int_0^1 |P_n'(t)| dt$$

$$= |1 - 1| + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc P_n CV vers 1 pour N_a.

• si $a = -2$: $P_n(a) = \frac{(-2)^n}{2^n} = (-1)^n$

Par l'absurde, si P_n tendait vers Q pour N_a :

$$N_a(P_n - Q) = |P_n(-2) - Q(-2)| + \int_0^1 |P_n' - Q'|(t)\, dt$$
$$\geqslant |P_n(-2) - Q(-2)|$$
$$\geqslant \underbrace{|(-1)^n - Q(-2)|}_{\text{ne tend pas vers } 0 \text{ qd } n \to +\infty}$$

Donc $N_a(P_n - Q) \not\to 0$

Absurde donc (P_n) n'a pas de limite

5) $0 \leq a < b$, $b > 1$. Mq N_a et N_b sont équivalentes

(Dans le cas $b = 2$, on a mq N_a et N_b n'étaient pas équivalentes car $P_n \xrightarrow{N_a} 0$ et $P_n \xrightarrow{N_b} 1$)

Prenons $Q_n(X) = \frac{X^n}{b^n}$

Par le m̂ raisonnement que précédemment,

$N_b(Q_n - 1) = \frac{1}{b^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $(b > 1)$

$N_a(Q_n) = \left|\frac{a}{b}\right|^n + \frac{1}{b^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $Q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{N_a} 0$ et $Q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{N_b} 1$

Donc N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

2) Si N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes

$\forall \alpha > 0, \exists x \in E, N_1(x) > \alpha N_2(x)$

ou

$\forall \beta > 0, \exists x \in E, N_2(x) > \beta N_1(x)$

Mq $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, tq $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour N_1 mais pas pour N_2 ou pour N_2 mais pas pour N_1.

Sans perte de généralité, on suppose :

$\forall \alpha > 0, \exists \underset{x(\alpha)}{x} \in E, N_1(x) > \alpha N_2(x)$

Donc si $n \in \mathbb{N}$, on dispose de $x_n \in E$ tq

$$N_1(x_n) > n\, N_2(x_n)$$

Posons $y_n = \dfrac{x_n}{n N_2(x_n)}$

Alors $N_2(y_n) = N_2\left(\dfrac{x_n}{\underbrace{n . N_2(x_n)}_{\text{cste} > 0}}\right)$

$= \dfrac{1}{n \cancel{N_2(x_n)}} \cancel{N_2(x_n)} = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$N_1(y_n) > n\, N_2(y_n) = 1$

Donc $N_1(y_n) \not\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

D'où le résultat