PSI

Mathématiques
DS 03

Samedi 9 novembre – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le soin et la présentation seront pris en compte dans la notation. **Mettez en valeur vos résultats** et **numérotez vos pages**.
- Le **correcteur blanc** (liquide ou en ruban) est **interdit** : toute utilisation entraînera une non-correction de la question.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir et pour y mettre les numéros des questions.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice ou de partie.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.

♫ Bon courage ! ♫

Etant donné un entier naturel n on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et dont le degré est inférieur ou égal à n.

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on dit que P est de degré n lorsque le coefficient a_n est non nul ; ce coefficient est alors appelé « *coefficient dominant de P* ». Dans tout le problème on identifie le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et sa fonction polynomiale associée.

Pour tout entier naturel n, on appelle c_n la fonction définie pour $x \in [-1, 1]$ par : $c_n(x) = \cos(n \arccos(x))$

Partie 1.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n, la fonction c_n est continue sur [-1,1].

2. Pour $x \in [-1, 1]$, donner une expression polynomiale de $c_0(x)$, $c_1(x)$, $c_2(x)$ et $c_3(x)$.

3. Représenter graphiquement dans un même repère orthonormal les fonctions c_0, c_1, c_2 et c_3.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1, 1]$, $c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2\, x\, c_n(x)$.

5. Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = X, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Montrer que pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant que l'on explicitera.

6. Prouver que, pour tout entier naturel n, la famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. Montrer que pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(x) = c_n(x)$.

Partie 2.

1. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ on pose $(P|Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)\, Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t$.

1.1 Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|.\|$ la norme associée.

Dans toute la suite du problème $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire.

1.2 Soient p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $I_{p,q} = \int_0^{\pi} \cos(p\,\theta)\, \cos(q\,\theta)\, \mathrm{d}\theta$.

Démontrer que, si l'on a $p \neq q$ alors $I_{p,q} = 0$.

Calculer $I_{p,p}$.

1.3 Montrer que, pour tout entier naturel n, la famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ définie dans la partie **1** est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Cette base est-elle orthonormale ?

1.4 Prouver que pour tout entier naturel n non nul, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1.5 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(X^n|T_n) = \frac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ des réels et P le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \, X^k$

2.1 Justifier l'existence d'une unique famille de réels $(b_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ telle que l'on a : $P = \sum_{k=0}^{n} b_k \, T_k$

2.2 Calculer b_n.

2.3 Montrer que l'on a : $\|P\|^2 \geqslant \frac{\pi}{2} \, b_n^2$

2.4 En déduire la valeur de :

$$\underset{(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{Inf}} \left(\int_{-1}^{1} \frac{(t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0)^2}{\sqrt{1 - t^2}} \, \mathrm{d}t \right)$$

Partie 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, on pose $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\,\pi}{2n}$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.

1. Vérifier que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines du polynôme T_n défini dans la partie **1** .

2. Soit $\mathscr{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $(x_1, \ldots, x_n)$, c'est-à-dire les polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui, pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$, vérifient

$$L_i(x_j) = \delta_i^j$$

où δ_i^j est le symbole de Kronecker : $\delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

2.1 $\mathscr{L}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?

2.2 Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall G \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \ \int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, G(x_i) \quad \text{avec} \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lambda_j = \int_{-1}^{1} \frac{L_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t$$

2.3 Soit $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

2.3a Justifier l'existence et l'unicité de deux polynômes S et U de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que : $R = S \, T_n + U$.

2.3b Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, R(x_i)$$

2.4 Dans toute cette question on fixe un entier naturel k dans $[\![1, n]\!]$.

2.4a On rappelle que $\forall x \in [-1, 1], \ T_n(x) = c_n(x)$ (voir partie 1.).

Montrer que :

$$T_n'(x_k) = \frac{(-1)^{k+1} \, n}{\sqrt{1 - x_k^2}} = \frac{(-1)^{k+1} \, n}{\sin(\theta_k)}$$

2.4b Soit la fonction $\psi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} \psi_k(x) = \dfrac{T_n(x)}{(x - x_k)\, T_n'(x_k)} & \text{lorsque } \; x \neq x_k \\ \text{et} & \\ \psi_k(x_k) = 1 & \end{cases}$

Vérifier que, pour tout x réel, on a : $\psi_k(x) = L_k(x)$.

2.4c Soit $j \in \mathbb{N}$.

Calculer $\displaystyle\lim_{\theta \to \theta_k} \frac{\cos(j\,\theta) - \cos(j\,\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}$.

En déduire que l'intégrale $u_j = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(j\,\theta) - \cos(j\,\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}\, \mathrm{d}\theta$ existe.

Montrer que l'on a $\lambda_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{n}\, u_n \, \sin(\theta_k)$.

2.4d Vérifier que :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \quad u_{j+2} - 2\, u_{j+1} \cos(\theta_k) + u_j = 0$$

2.4e En déduire que $\lambda_k = \dfrac{\pi}{n}$.

3. Démontrer que, pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a la relation :

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} R\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\,\pi}{2n}\right)\right)$$

PARTIE 4.

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel.
On pourra confondre les expressions : polynôme et fonction polynomiale. Ainsi les polynômes de Tchebycheff T_k de la Partie 1 pourront être considérés comme des éléments de E.
Si f est un élément de E, on pose $\|f\|_\infty = \displaystyle\sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$.
Pour f et g éléments de E, on notera $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, \mathrm{d}t$. On admet qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E. On note $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Polynôme de meilleure approximation quadratique. Dans toute cette partie 4., f désignera un élément de E et n un entier naturel. On pose

$$d_2(f, E_n) = \inf\left\{\|f - Q\|, Q \in E_n\right\}.$$

Le but de la partie est d'exprimer $\|f\|$ en fonction des $\dfrac{\langle f, T_k \rangle}{\|T_k\|}$, où $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la famille des polynômes étudiés en partie 1.

1. Énoncer un théorème justifiant l'existence et l'unicité d'un vecteur $t_n(f)$ dans E_n tel que $\|f - t_n(f)\| = d_2(f, E_n)$.

2. Exprimer $t_n(f)$ à l'aide des polynômes de Tchebychev et montrer que $d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|^2}}$.

3. En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|^2}$ est convergente.

Convergence en norme quadratique

4. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.

5. Soit h un élément de E, montrer que $\|h\| \leqslant \sqrt{\pi}\|h\|_\infty$.

6. On admet le résultat suivant :

Théorème 1 (Weierstrass)

Pour toute fonction f dans E, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction P polynomiale sur $[-1, 1]$ vérifiant $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Montrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que : $\lim_{n\to+\infty} \|f - t_n(f)\| = 0$.

On rappelle que $\|f - t_n(f)\| = \inf\{\|f - Q\|, Q \in E_n\}$.

7. En déduire que $\|f\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|^2}}$.

8. **Application : un théorème des moments.** Que peut-on dire d'une fonction h de E telle que pour tout entier naturel n, $\int_{-1}^{1} \frac{h(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0$?