Mathématiques – DS 03 – un corrigé

Partie 1.

1. Par définition, Arccos est continue sur $[-1,1]$, à valeurs réelles, et cos est continue sur $\mathbb{R}$ donc c_n est continue sur $[-1,1]$.

2. Soit $x \in [-1,1]$. Alors

- $\boxed{c_0(x) = \cos(0) = 1}$
- $\boxed{c_1(x) = \cos(\mathrm{Arccos}(x)) = x}$
- $c_2(x) = \cos(2\mathrm{Arccos}(x)) = 2\cos(\mathrm{Arccos}(x))^2 - 1 \boxed{= 2x^2 - 1}$
- Ensuite,

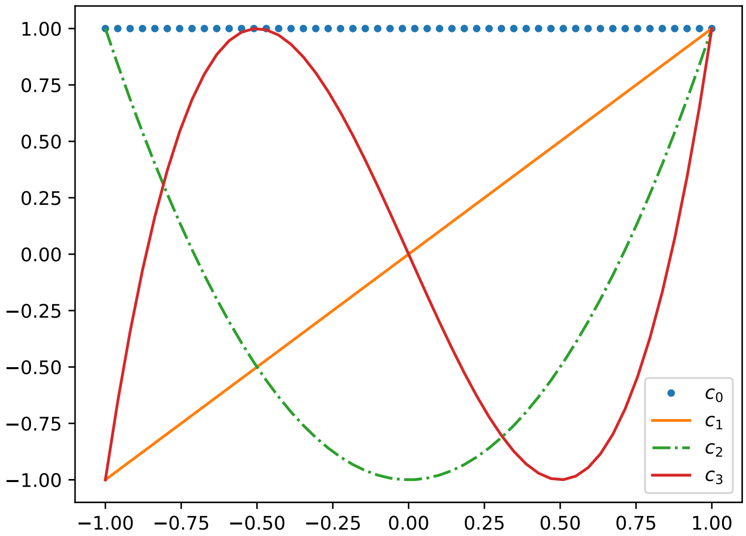
$$\begin{aligned}
c_3(x) &= \cos(3\mathrm{Arccos}(x)) \\
&= \cos(2\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arccos}(x)) \\
&= \cos(2\mathrm{Arccos}(x))\cos(\mathrm{Arccos}(x)) - \sin(2\mathrm{Arccos}(x))\sin(\mathrm{Arccos}(x)) \\
&= (2x^2-1)x - 2\cos(\mathrm{Arccos}(x))\sin(\mathrm{Arccos}(x))\sin(\mathrm{Arccos}(x)) \\
&= 2x^3 - x - 2x(1-\cos^2(\mathrm{Arccos}(x))) \\
&= 2x^3 - x - 2x(1-x^2) \\
&\boxed{= 4x^3 - 3x.}
\end{aligned}$$

3. Allez, histoire de vous montrer un peu de lignes de codes, je vais les dessiner avec python : On tape

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def c0(x):
    return 1

def c1(x):
    return x

def c2(x):
    return 2*x**2 -1

def c3(x):
    return 4*x**3 - 3*x


X = np.linspace(-1,1)
Y0 = [c0(x) for x in X]
Y1 = [c1(x) for x in X]
Y2 = [c2(x) for x in X]
Y3 = [c3(x) for x in X]

plt.plot(X,Y0,'.',label='$c_0$')
plt.plot(X,Y1,'-',label='$c_1$')
```

```
plt.plot(X,Y2,'-.',label='$c_2$')
plt.plot(X,Y3,label='$c_3$')
plt.legend()

plt.show()
```

On obtient



4. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$. Alors

$$\begin{aligned}
c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) &= \cos((n+1)\mathrm{Arccos}(x)) + \cos((n-1)\mathrm{Arccos}(x)) \\
&= 2\cos\left(\frac{(n+1)\mathrm{Arccos}(x) + (n-1)\mathrm{Arccos}(x)}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)\mathrm{Arccos}(x) - (n-1)\mathrm{Arccos}(x)}{2}\right) \\
&= 2\cos(n\mathrm{Arccos}(x))\cos(\mathrm{Arccos}(x)) \\
&= 2x\cos(n\mathrm{Arccos}(x)) \\
&\boxed{2xc_n(x).}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

5. Démontrons par récurrence double sur $n \geqslant 1$ que $\boxed{T_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 2^{n-1}}$ (on appelle cette proposition $\mathcal{P}_n$).
(on élimine le cas $n = 0$ car le coefficient dominant de T_0 est $1 \neq 2^{0-1}$)
Initialisation. T_1 est de degré 1, de coefficient dominant $1 = 2^{1-1}$ et T_2 est de degré 2, de coefficient dominant $2 = 2^{2-1}$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, tels que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies. Alors $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
Or, T_n est de degré n et T_{n+1} est de degré $n+1$ donc $2XT_{n+1}$ est de degré $n+2$. Donc $2XT_{n+1} - T_n$ est de degré $n+2$, et son coefficient dominant est le coefficient dominant de $2XT_{n+1}$, c'est-à-dire 2 fois le coefficient dominant de T_{n+1}, i.e. $2 \times 2^{n+1-1} = 2^{n+2-1}$.
D'où $\mathcal{P}_{n+2}$, l'hérédité et le résultat.

6. La famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ à degrés échelonnés, c'en est donc une famille libre à $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments, $\boxed{\text{donc une base.}}$

7. Soit $x \in [-1,1]$. Les suites réelles $(c_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et ont leurs deux premiers termes qui sont égaux donc les suites sont égales.

Partie 2.

1. 1.1 Question de cours : on fait juste attention que, pour le caractère défini, si $(P|P) = 0$ alors $P(t) = 0$ pour tout t de $]-1,1[$ donc P s'annule une infinité de fois, donc P est nul.

1.2 Déjà,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{p,q} &= \int_0^\pi \frac{\cos((p+q)(\theta)) + \cos((p-q)\theta)}{2} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((p+q)\theta)d\theta + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((p-q)\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Distinguons alors trois cas :

- si $p \neq q$ alors $p+q \neq 0$ (car p et q sont dans $\mathbb{N}$) et $p-q \neq 0$, donc
$$\mathrm{I}_{p,q} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p+q)\theta)}{p+q}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p-q)\theta)}{p-q}\right]_0^\pi \boxed{= 0}$$
- si $p = q = 0$, alors $\boxed{\mathrm{I}_{p,q} = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi}$
- si $p = q$ et $p \neq 0$, alors $p+q \neq 0$ donc
$$\mathrm{I}_{p.q} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p+q)\theta)}{p+q}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi 1 d\theta \boxed{= \frac{\pi}{2}.}$$

1.3 Soient p et q deux entiers naturels distincts de $[\![0,n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}
(T_p|T_q) &= \int_{-1}^1 \frac{T_p(t)T_q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \int_{-1}^1 \frac{\cos(p\mathrm{Arccos}(t))\cos(q\mathrm{Arccos}(t))}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ par la question 7 de la Partie 1.} \\
&= \int_{-1}^1 \cos(p\varphi(t))\cos(q\varphi(t))\varphi'(t)dt,
\end{aligned}$$

où $\varphi :]-1,1[\to]0,\pi[$ est une bijection $\mathscr{C}^1$ strictement décroissante. Donc, d'après la formule de changement de variables,

$$\boxed{(T_p|T_q) = \int_\pi^0 \cos(p\theta)\cos(q\theta)d\theta = 0}$$

$\boxed{\text{Donc } T_p \text{ est } T_q \text{ sont orthogonaux.}}$ Cependant, cette base $\boxed{\text{n'est pas orthonormée}}$ car $\|T_p\|^2 = \dfrac{\pi}{2}$ si $p \neq 0$ et π si $p = 0$.

1.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente, T_n est orthogonal à $T_0, \dots, T_{n-1}$, donc à $\boxed{\mathrm{Vect}(T_0, \dots, T_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$ par la question 6 de la Partie 1.

1.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $T_n = 2^{n-1}X^n + P$ où $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. DOnc

$$\|T_n\|^2 = (2^{n-1}X^n + P|T_n) = 2^{n-1}(X^n|T_n) + (P|T_n) = \boxed{2^{n-1}(X^n|T_n)}$$

car par la question précédente $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $P \perp T_n$. D'où le résultat demandé.

2. 2.1 $(T_0, \dots, T_n)$ est une $\boxed{\text{base}}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ donc on dispose de $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k T_k$.

2.2 Le coefficient dominant de P est 1. Le coefficient dominant de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k T_k$ est $b_n \times 2^{n-1}$.

Donc, par égalité des coefficients, $1 = 2^{n-1}b_n$, c'est-à-dire que $\boxed{b_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}}$.

2.3 Comme $(T_0, \dots, T_n)$ est orthonormée, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\|P\|^2 &= \left\|\sum_{k=0}^{n} b_k T_k\right\|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_k^2 \|T_k\|^2 \\
&\boxed{\geqslant b_n^2 \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2} b_n.}
\end{aligned}$$

2.4 *Si la question était posée comme ça, on aurait cherché à faire une projection. Mais, vu la teneur de l'énoncé, on va utiliser les questions précédentes.* On cherche à déterminer

$$\boxed{\inf_{(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \left\|X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0\right\|^2}$$

Par la question précédente, on sait que $\forall (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\|X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0\right\|^2 \geqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{2^{2n-2}} = \frac{\pi}{2^{2n-1}}.$$

Ensuite, on sait que si $P = \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$, alors $\|P\|^2 = \dfrac{1}{2^{2n-2}}\|T_n\| = \dfrac{\pi}{2^{2n-1}}$. Donc

$$\boxed{\inf_{(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \left\|X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0\right\|^2 = \frac{\pi}{2^{2n-1}}.}$$

Partie 3.

1. *Là, il y a une interprétation à faire : sont* **LES** *racines. Cela signifie qu'il faut montrer que $T_n(x_k) = 0$ pour tout k et que l'on obtient toutes les racines de T_n de la sorte.*
Déjà, si $k \in [\![1, n]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
T_n(x_k) &= T_n(\cos(\theta_k)) \\
&= \cos(n\theta_k) \text{ car } T_n \text{ et } c_n \text{ coïncident sur } [-1, 1] \\
&= \cos((2k-1)\pi/2) = 0.
\end{aligned}$$

Donc $T_n(x_k) = 0$.
Ensuite, on remarque que pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\theta_k \in [0, \pi]$. La fonction cos étant injective sur $[0, \pi]$, on en déduit que $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.
Le polynôme T_n est de degré n, s'annule en les n points distincts $x_1, \dots, x_n$, donc $x_1, \dots, x_n$ sont exactement les racines de T_n.

2. 2.1 Par le cours, la famille $\mathscr{L}$ est bien une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
L'énoncé de la question est ambigü, on s'attendait, je pense, à ce qu'on démontre la liberté.

2.2 Soit $G \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par le théorème d'interpolation de Lagrange, on sait que

$$G(X) = \sum_{i=1}^{n} G(x_i) L_i(X).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{n} G(x_i) \frac{L_i(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} G(x_i) \int_{-1}^{1} \frac{L_i(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G(x_i),\end{aligned}$$

où, pour tout i, $\lambda_i = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{L_i(t)}{\sqrt{1-t^2}}$.

2.3

2.3.a Par le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, il existe un unique couple (S, U) vérifiant $R = ST_n + U$ et $\deg(U) < \deg(T_n) = n$. De plus, $\deg(R) \leqslant 2n - 1$ donc $\deg(ST_n) \leqslant 2n - 1$, c'est-à-dire, comme $\deg(T_n) = n$, $\deg(S) \leqslant n - 1$.

2.3.b On écrit que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \int_{-1}^{1} \frac{S(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_{-1}^{1} \frac{U(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= (S|T_n) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(x_i) \text{ car } \deg(U) \leqslant n-1 \\ &= \boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(x_i)} \text{ car } T_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X]\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i R(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S(x_i) T_n(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(x_i) \\ &= \boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(x_i)} \text{ car les } x_i \text{ sont racines de } T_n\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R(x_i)}$$

2.4

2.4.a Pour tout x dans $[-1,1]$, $T_n(x) = c_n(x)$, donc

$$\begin{aligned} T_n'(x) &= c_n'(x) \\ &= \frac{-n}{\sqrt{1-x^2}} \times (-\sin(n\text{Arccos}(x)) \\ &\boxed{= \frac{n\sin(n\text{Arccos}(x))}{\sqrt{1-x^2}}.} \end{aligned}$$

En particulier, pour $x = x_k = \cos(\theta_k)$, on obtient

$$\begin{aligned} T_n'(x_k) &= \frac{n\sin(n\text{Arccos}(\cos(\theta_k)))}{\sqrt{1-x_k^2}} \\ &= \frac{n\sin(n\theta_k)}{\sqrt{1-x_k^2}} \text{ car } \theta_k \in [0,\pi] \\ &= \frac{n\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)}{\sqrt{1-x_k^2}} \\ &= \frac{n\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{1-x_k^2}} \\ &= \boxed{\frac{n(-1)^{k+1}}{\sqrt{1-x_k^2}}} \\ &= \frac{n(-1)^{k+1}}{\sqrt{1-\cos(\theta_k)^2}} \\ &= \frac{n(-1)^{k+1}}{|\sin(\theta_k)|} \\ &= \boxed{\frac{n(-1)^{k+1}}{\sin(\theta_k)}} \text{ car } \theta_k \in [0,\pi] \end{aligned}$$

2.4.b Écrivons $T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$.

- Déjà,

$$T_n'(x) = 2^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq j}}(x-x_i)$$

En particulier, en évaluant en x_k, tous les termes de la somme vont disparaître, sauf pour $j=k$, d'où

$$\boxed{T_n'(x_k) = 2^{n-1}\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}}(x_k-x_i)}$$

- Ensuite,

$$\boxed{\frac{T_n(x)}{(x-x_k)} = \frac{2^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(x-x_k)}{(x-x_k)} = 2^{n-1}\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}(x-x_i)}$$

On en déduit que, pour $x \neq x_k$,

$$\boxed{\psi_k'(x) = \frac{2^{n-1}\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}(x-x_i)}{2^{n-1}\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}(x_k-x_i)} = L_k(x),}$$

par définition des polynômes interpolateurs de Lagrange. L'égalité est aussi vraie en $x = x_k$, d'où le résultat.

2.4.c On remarque que

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_k)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)} &= \frac{-2\sin\left(j\frac{\theta+\theta_k}{2}\right)\sin\left(j\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{\theta+\theta_k}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)} \\
&\underset{\theta\to\theta_k}{\sim} \frac{\sin\left(j\frac{\theta+\theta_k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta+\theta_k}{2}\right)}\frac{j\frac{\theta-\theta_k}{2}}{\frac{\theta-\theta_k}{2}} \\
&\boxed{\underset{\theta\to\theta_k}{\longrightarrow} j\frac{\sin(j\theta_k)}{\sin(\theta_k)}}
\end{aligned}$$

(on remarque que $\theta_k \in]0,\pi[$ donc le dénominateur ne s'annule pas)

On en déduit que la fonction $f : \theta \mapsto \dfrac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_k)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)}$ est continue sur $[0,\pi]\backslash\{\theta_k\}$ et $\boxed{\text{prolongeable par continuité en } \theta_k.}$

$\boxed{\text{Donc } \int_0^\pi f \text{ existe.}}$

On calcule alors

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \int_{-1}^{1}\frac{L_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{\psi_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \\
&= -\int_{\mathrm{Arccos}(\pi)}^{\mathrm{Arccos}(0)}\psi_k(\cos(\mathrm{Arccos}(t))\mathrm{Arccos}'(t)dt \\
&= \boxed{\int_0^\pi \psi_k(\cos(\theta))d\theta,}
\end{aligned}$$

par changement de variables $\theta = \mathrm{Arccos}(t)$, Arccos étant une bijection $\mathscr{C}^1$ strictement décroissante de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$. Donc

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \int_0^\pi \frac{1}{T_n'(x_k)} \frac{T_n(\cos(\theta))}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)} d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{T_n'(x_k)} \frac{\cos(n\theta)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)} d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{T_n'(x_k)} \frac{\cos(n\theta)-\cos(n\theta_k}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)} d\theta \\
&= \frac{1}{T_n'(x_k)} u_n \\
&= \boxed{\frac{(-1)^{k+1}\sin(\theta_k)}{n} u_n.} \text{ par la question 2.4.a}
\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi prouvé.

2.4.d Soit j dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
&u_{j+2}+u_j \\
&= \int_0^\pi \frac{\cos((j+2)\theta)+\cos(j\theta)-(\cos((j+2)\theta_k)+\cos(j\theta_k))}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)} d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{2\cos\left(\frac{(j+2)\theta+j\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(j+2)\theta-j\theta}{2}\right)-2\cos\left(\frac{(j+2)\theta_k+j\theta_k}{2}\right)\cos\left(\frac{(j+2)\theta_k-j\theta_k}{2}\right)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)} d\theta \\
&= 2\int_0^\pi \frac{\cos((j+1)\theta)\cos(\theta)-\cos((j+1)\theta_k)\cos(\theta_k)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)} d\theta \\
&= 2\int_0^\pi \frac{\cos((j+1)\theta)\cos(\theta)-\cos((j+1)\theta)\cos(\theta_k)+\cos((j+1)\theta)\cos(\theta_k)-\cos((j+1)\theta_k)\cos(\theta_k)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)} d\theta \\
&= 2\int_0^\pi \cos((j+1)\theta)d\theta + 2\cos(\theta_k)u_{j+1} \\
&\boxed{= 2\cos(\theta_k)u_{j+1}}
\end{aligned}$$

D'où $u_{j+2}+u_j = 2\cos(\theta_k)u_{j+1}$, $\boxed{\text{d'où la relation de récurrence.}}$

2.4.e On a alors affaire à une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique

$$r^2 - 2\cos(\theta_k)r + r = 0,$$

de discriminant $4\cos^2(\theta_k)-4 = -4\sin^2(\theta_k)$: l'équation possède donc deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = \cos(\theta_k) + i\sin(\theta_k) = e^{i\theta_k} \text{ et } r_2 = e^{-i\theta_k}.$$

On dispose donc de A, B réels tels que pour tout j dans $\mathbb{N}$, $u_j = A\cos(j\theta_k) + B\sin(j\theta_k)$.
Or, $u_0 = 0$ donc $A = 0$ et $u_1 = \pi$ donc $B = \dfrac{\pi}{\sin(\theta_k)}$. On en déduit que pour tout j dans $\mathbb{N}$,

$$\boxed{u_j = \frac{\pi}{\sin(\theta_k)}\sin(j\theta_k)}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \frac{(-1)^{k+1}\sin(\theta_k)}{n}\frac{\pi}{\sin(\theta_k)}\sin(n\theta_k) \\ &= \frac{(-1)^{k+1}\pi\sin(n\theta_k)}{n} \\ &\boxed{= \frac{\pi}{n}}\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

2.5 Si $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, alors par la question 2.3.b,

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R(x_i)$$

Mais par la question 2.4.e, $\lambda_k = \frac{\pi}{n}$, $\boxed{\text{ce qui permet de conclure.}}$
Vous imaginez bien que cette question est sur très peu de points...

Partie 4.

1. Le sous-espace vectoriel E_n est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel. La distance à un tel sous-espace est atteinte, en $t_n(f)$ le $\boxed{\text{projeté orthogonal}}$ de f sur E_n.
2. On a vu en partie 2 que la famille $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est orthogonale (pas orthonormée). De plus, on a dit que $(T_0,\dots,T_n)$ était une base de E_n. Ainsi, $\left(\frac{T_0}{\|T_0\|},\dots,\frac{T_n}{\|T_n\|}\right)$ est une base orthonormée et
$$\boxed{t_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k\rangle}{\|T_k\|}\frac{T_k}{\|T_k\|}.}$$
On en déduit que $\|t_n(f)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|^2}$. De plus,
$$d_2(f, E_n)^2 = \|f - t_n(f)\|^2.$$
Mais
$$\|f\|^2 = \|f - t_n(f) + t_n(f)\|^2 = \|f - t_n(f)\|^2 + \|t_n(f)\|^2,$$
d'où
$$d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|^2 - \|t_n(f)\|^2 \boxed{= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|^2}}}$$
3. Soit n dans $\mathbb{N}$. Par la question précédente, on sait que $\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|^2} \leqslant \|f\|^2$. La série de terme général $\frac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|^2}$ est une série $\boxed{\text{à termes positifs}}$, de $\boxed{\text{sommes partielles majorées}}$, donc $\boxed{\text{cette série est convergente.}}$

4.
- Déjà, $\|\cdot\|_\infty$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
- (homogénéité) Soit f dans E et λ dans $\mathbb{R}$. Alors
$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |\lambda f(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)| = |\lambda| \, \|f\|_\infty .$$
- (séparation) Soit f dans E tel que $\|f\|_\infty = 0$. Alors $\sup_{t\in[-1,1]} |f(t)| = 0$ donc $\forall t \in [-1,1],\ f(t) = 0$, i.e. $f = 0_E$.
- (inégalité triangulaire) Soit $(f,g) \in E^2$, soit $t \in [-1,1]$. Alors
$$|f(t)+g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$
Donc, comme $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $\{|f(t)+g(t)|,\, t \in [-1,1]\}$, on en déduit que
$$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Donc $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme.

5. On calcule
$$\begin{aligned}\|h\|^2 &= \int_{-1}^{1} \frac{h(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} \\ &\leqslant \int_{-1}^{1} \frac{\|h\|_\infty^2}{\sqrt{1-t^2}} \\ &\leqslant \|h\|_\infty^2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ &\leqslant \|h\|_\infty^2 \left[\operatorname{Arcsin}(t)\right]_{-1}^{1} \\ &\boxed{\leqslant \|h\|_\infty^2 \times \pi.}\end{aligned}$$

Le résultat est donc démontré en passant à la racine carré.

6. Revenons à la définition de la limite. Soit $\varepsilon > 0$. Soit, par le théorème de Weierstrass, une fonction polynomiale p vérifiant $\|f-p\|_\infty \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$. Ainsi, $\boxed{\|f-p\| \leqslant \varepsilon}$. Notons $d = \deg(p)$. Alors, pour tout $n \geqslant d$, comme $p \in E_n$,
$$\|f - t_n(f)\| \leqslant \|f-p\| \leqslant \|f-p\|_\infty \leqslant \varepsilon,$$
donc : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists d \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant d,\ \|f - t_n(f)\| \leqslant \varepsilon}$. Ceci signifie exactement que $\|f - t_n(f)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

7. On en déduit que
$$\|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
c'est-à-dire que
$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|^2} = \|f\|^2}$$

8. On en déduit immédiatement que $\|f\| = 0$ et donc que $f = 0$.