nlaillet.math@gmail.com

DM 07
CCINP PSI 2018
À rendre le vendredi 22/11

Obligatoire. Commencez à passer 15 minutes à **analyser le sujet** : que veut-il nous faire démontrer ? Quelles sont les questions qui ont l'air proches du cours (voire des questions de cours) ? Quelles questions ont l'air plus difficiles ?
N'hésitez pas à prendre un peu de place en début de copie pour expliquer l'analyse que vous faites de ce sujet !

Conseils. Je veux des premières questions qui sont **impeccables en termes de rédaction.**

Formules.

- **Formule 1.** Questions 31 à 38 : 8 questions qui vont vous faire travailler l'espérance en probabilités. Temps maximum conseillé : 1h30
- **Formule 2.** Questions 31 à 40 : 10 questions, un petit peu plus que la formule 1. Temps maximum conseillé : 2h.
- **Formule 3.** Tout. La dernière partie fait travailler des intersections d'événements, un peu délicates. Temps maximum conseillé : 3h.

PROBLÈME 2

Notations et définitions

- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ désigne celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée ($\mathbf{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge presque-sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Q31. On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée*.

Q32. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

Q33. En déduire que pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbf{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{\alpha}.$$

Q34. Montrer que pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbf{P}\left(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}\right) \leq \frac{\left(\mathbf{E}\left(e^{tX}\right)\right)^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbf{E}\left(e^{tX}\right)$

Q35. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbf{R}$.
En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.

Q36. En déduire que pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in [-1, 1]$ on a :

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$

Q37. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \leq \operatorname{ch}(t).$$

Q38. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que pour tout $t > 0$, on a :

$$\mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q39. Montrer que la fonction

$$t \in \mathbf{R} \mapsto e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$$

atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q40. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$, puis que :

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Conclusion

Q41. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q42. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega \; ; \; |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, B_n est un événement et que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n \right) = 0.$$

Q43. Posons, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega \; ; \; \exists n \in \mathbf{N}^*, \; \forall m \geq n, \; |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, Ω_k est un événement.
Écrire l'ensemble $A = \left\{ \omega \in \Omega \; ; \; \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(\omega) = 0 \right\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbf{N}^*$.
En déduire que A est un événement.

Q44. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathbf{P}(A) = 1.$$

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1062 – D'après documents fournis