PSI – Programme de colles
Semaine 07 – du 18 au 22 novembre 2024

Programme en bref Probabilités

— Variables aléatoires : événements, loi, loi conjointe, lois usuelles, indépendance.

— Moments d'une variable aléatoire : espérance seulement pour le moment. Éviter trop d'inégalités probabilistes.

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. Continuité croissante/décroissante.
2. Une somme de n vaiid de Bernoulli suit une loi binomiale.
3. (exo classique) Loi de la somme de deux variables indépendantes de Poisson.
4. (exo classique) Loi du minimum de deux variables suivant une loi géométrique.
5. (exo classique) La loi géométrique est la seule loi sans mémoire.
6. Espérance d'une des lois usuelles (binomiale, géométrique, Poisson).
7. Positivité de l'espérance ; variable positive d'espérance nulle.
8. Formule $\mathbb{E}(X) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Variables aléatoires discrètes

B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires discrètes	
Univers Ω, tribu $\mathscr{A}$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.	On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Traduction de la réalisation des événements $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.	L'univers Ω n'est en général pas explicité. Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$. Notation $(X \geqslant x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Probabilité	
Probabilité sur $(\Omega,\mathscr{A})$, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$. Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité.	Notation $P(A)$.
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Sous-additivité : $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que $$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$
Événement presque sûr, événement négligeable.	Système quasi-complet d'événements.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B)>0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\vert B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B définit une probabilité. Formule des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales.	Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\vert A_n)P(A_n)$$ On rappelle la convention $P(B\vert A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n)=0$.
Formule de Bayes.	
d) Loi d'une variable aléatoire discrète	
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$. On note $X\sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X\sim Y$ alors $f(X)\sim f(Y)$.	On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire.
Variable géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$: $$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X\sim\mathscr{G}(p)$. Relation $P(X>k) = (1-p)^k$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Variable de Poisson de paramètre $\lambda>0$: $$\forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	Notation $X\sim\mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares.
Couple de variables aléatoires discrètes.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$.
Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle de Y sachant un événement A.	Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Événements indépendants	
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $$P(A\|B) = P(A).$$
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par $$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$ Extension au cas de n variables aléatoires.
Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.	On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
Fonctions de variables indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.	Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

C - Espérance et variance

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe	
Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, définie par $$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$	On adopte la convention $xP(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$.
Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X.	X est d'espérance finie si la famille $\big(xP(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X. Variable centrée.
Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, relation : $$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n).$$	
Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Formule de transfert : $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)P(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas : $$\mathrm{E}\Big(f(X)\Big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$	On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n-uplets de variables aléatoires.
Linéarité de l'espérance. Si $\|X\| \leqslant Y$ et $\mathrm{E}(Y) < +\infty$, alors X est d'espérance finie. Positivité, croissance de l'espérance.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque sûr.	
Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et : $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	Extension au cas de n variables aléatoires.
Inégalité de Markov.	