CORRECTION TD 6

Exercice 7 :

1) Trouvons la valeur de a. On le suppose stct positif.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1 \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1+a^k}{4k!} = 1$$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{4k!} = 1$

donc $\displaystyle\frac{1}{4} e^1 + \frac{e^a}{4} = 1$

donc $e^a = 4 - e$

donc $\boxed{a = \ln(4-e)}$

2) Espérance de X :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{1+a^k}{4k!} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1+a^k}{(k-1)!}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + a \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} \right]$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4} \left(e^1 + a e^a\right)}$$

3) Cherchons la loi de $X+Y$:

$(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$

Soit $j \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X+Y=j) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X+Y=j,\ Y=k) \quad \text{(probas totales)}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=j-k,\ Y=k) \quad \text{car } (Y=k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est un sce}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=j-k)\,\mathbb{P}(Y=k) \quad \text{car } X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \frac{1+a^{j-k}}{4(j-k)!} \times \frac{1+a^k}{4k!}$$

$$= \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{j} \frac{j!}{(j-k)!\,k!} \frac{(1+a^{j-k})(1+a^k)}{j!}$$

$$= \frac{1}{16\,j!} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (1+a^{j-k})(1+a^k)$$

$$= \frac{1}{16\,j!} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (1+a^k+a^{j-k}+a^j)$$

$$= \frac{1}{16\,j!} \left[\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} + \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} a^k + \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} a^{j-k} + \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} a^j \right]$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X+Y=j) = \frac{1}{16\,j!} \left[2^j(1+a^j) + 2(1+a)^j \right]}$$

Rq : $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2\,\mathbb{E}(X)$ car $X \sim Y$

$= \frac{1}{2}(e + a e^a)$

Exercice 6 :

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

* $\boxed{\mathbb{P}(A) = \dfrac{q}{1+q}}$ avec $q = 1-p$ (cf cours)

* $\mathbb{P}(B) = \sum_{\substack{k>0 \\ k \text{ mult. de } 3}} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=3k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{3k-1}$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^3)^k = \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{1-q^3}\right) q^3$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{pq^2}{1-q^3}}$$

* $\mathbb{P}(A \cap B) = \sum_{\substack{k \geq 1 \\ \text{multip. de } 6}} \mathbb{P}(X=k)$

$= \dots$

$$= \frac{pq^5}{1-q^6} \boxed{= \frac{pq^5}{(1-q^3)(1+q^3)}}$$

* $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \dfrac{pq^3}{(1-q^3)(1+q)}$

On a les équivalences :

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

$$\Leftrightarrow \frac{pq^5}{(1-q^3)(1+q^3)} = \frac{pq^3}{(1-q^3)(1+q)}$$

$\iff (1+q)q^2 = (1+q^3)$

$\iff q^2 + q^3 = 1+q^3$

$\iff q^2 = 1$

$\underset{(*)}{\iff} q = 1$, impossible car $p \in]0,1[$
donc $q \in]0,1[$

Donc d'après $(*)$, A et B ne sont pas indépendants

Exercice 10 : X_k : résultat du k-ième tirage $X_k \sim \mathcal{U}(\{1,2,3\})$.

1) Y est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Soit $k \geq 2$

$$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_1=i, X_2=i, \dots, X_{k-1}=i, X_k \neq i)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_1=i) \times \dots \times \mathbb{P}(X_{k-1}=i)\,\mathbb{P}(X_k \neq i)$$
par indépendance

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3^{k-1}} \times \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=k) = 2 \times \frac{1}{3^{k-1}}}$$

2) Loi de $Y-1$?

$Y-1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$

TD 06 Maths
Correction

Exo 10 (suite) :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y-1, k) &= \mathbb{P}(Y=k+1)\\ &= 2 \times \frac{1}{3^k}\\ &= \frac{2}{3} \times \left(1-\frac{2}{3}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{Y-1 \sim \mathcal{G}(2/3)}$